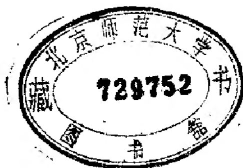
大学基础数学自学丛书

多元函数微积分

方 企 勤



上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

多元函数微积分

方企勤

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 12.75　字数 282,000
1980年8月第1版　1980年8月第1次印刷
印数 1—18,000

书号：13119·842　定价：（科四）1.20元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期新长征的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学和北京师范大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本。文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么"诀窍"，如果有的话，那就是"多思考，多练习，熟能生巧"。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编者的话

本书共分三章，第一章讲述多元函数微分学，第二、三章讲述多元函数积分学与场论。在讲法上，尽量以几何图象和物理现象为依据，力图做到直观易懂，揭示概念的实质，而不过分追求逻辑上的严格性．例如微分和旋度概念就是在这一思想指导下，采用了与传统书上不同的讲法．在内容的选取上，力图做到多而不杂，能为进一步学习普通物理、复变函数、概率论、数理方程等课程提供必要的基础知识．另外，考虑到多元微积分现代化的趋势，使读者对这方面有所了解，我们用一节的篇幅介绍了向量外积及外微分形式这两个内容的大概．

在编写过程中，考虑到读者自学的方便，书中配有大量例题，通过例题进一步说明概念及做题的方法、技巧．在各章中都设置了一定数量的习题，并在书末附有它们的绝大部分答案，供读者自我核对参考．

本书编写过程中，得到了吴良大、姚孟臣、张清允等同志的帮助，特此表示感谢．

由于作者水平有限，加之编写时间仓促，书中不免有些错误和缺点，恳切希望读者批评指正．

方企勤　1979 年 5 月
于北京大学数学力学系

目　　录

第一章　多元函数的微分学

第二章 重积分

第三章 曲线、曲面积分和场论

第一章

多元函数的微分学

读者学了一元函数微积分以后，一定会感到微积分并不神秘；相反，微积分中的许多主要概念都是有很强的实际背景的．例如，人们为了求质点的瞬时速度和曲线的切线，才引进导数与微分的概念．虽然导出概念时，经过人们抽象思维的加工，设想出了“极限”这一无限过程，但这也是人们在做了大量近似计算的基础上，逐渐地产生出来的一种想法，即：从无限变化的趋势中，确定出有限的极限值，也就是从近似值的变化趋势中，确定出要求的准确值．

同样，读者也一定会感到微积分并不抽象；相反，它的应用非常广泛，非常有效．例如，初等数学中需要运用很高技巧才能解决的极值问题，用了微分方法就可轻而易举地获得解决．而且微积分给求极值、求面积和体积等问题提供了一种既简便易行、又十分有效的方法，解决了初等数学所无法解决的问题．微积分在它问世初期，其威力曾使人们感到惊异；在当代，微积分仍是一个有力的数学工具．

但是，如果我们的学习只停留在一元微积分阶段是很不够的，因为真正的实际问题是相当复杂的，所含的变量不止两个，而是有好多个；诸变量之间的函数关系也不止一个，也是有好几个．这就需要涉及到多个自变量的函数．如厂房设计时，当厂房的结构和强度要求已确定的情况下，怎样选取柱和梁的尺寸，使所用的材料最省呢？多配钢筋，固然可以保证柱和梁的强度要求，但这不符合少花钱多办事的精神；钢筋配得

过少，只要其中一根柱和梁的强度不合要求，厂房就有倒塌的危险．怎样做到既符合强度要求，又使材料最省呢？在进行这个具体问题的分析时，厂房的每一根柱和梁，或每一组柱和梁，它们断面的两个尺寸都看成是自变量．这样，对一般中型的厂房来说，就有几十个自变量．我们的问题，就是要求出所用材料与所有柱和梁断面尺寸的函数关系，以及每一根柱和梁的强度与所有柱和梁断面尺寸的函数关系；然后在后者的强度被得到满足的条件下求出前者的材料函数的最小值；同时也要求达到这个极小值时各柱、梁的具体断面尺寸，从而作为设计的依据．象这类最优化问题在实践中到处都会遇到，所以，必须研究了多个变量函数的微分与积分才能使微积分成为解决实际问题的得力工具．

本章在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论时以二元函数为主，因为由一元函数进入到二元函数时会产生一些质的不同．如一元函数中有单调的概念，二元函数就没有简单的相仿概念，所以一元函数的内容有些不能推广到多元函数，有些虽然可以推广到多元函数，这时也会出现一些与一元函数不同的新问题．但从二元、三元函数到自变量个数较多的函数时就没有什么本质上的不同，其困难主要是由于自变量个数增加引起的，这些困难已不属于分析性质的，而是属于代数和几何性质的．因此，只要有了处理二元、三元函数的分析概念和方法，再配合一些其它的代数和几何知识，也就不难掌握多元函数理论的各种近代应用了．

第一节　多元函数的概念

1.1　区域

为了讨论二元函数的定义域，我们先介绍平面区域的概念．在讲一元函数时，我们称满足不等式 $a<x<b$ 的点 x 的全体为开区间，称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的点 x 的全体为闭区间，相应地在平面上有开区域和闭区域的概念．相应于直线上的半开半闭区间，我们也可以讲平面上的非开非闭区域，但由于这种情况很少遇到（除非是人为地去定义出这样一些点集），我们就不讨论它．下面我们只讨论开区域和闭区域．

把满足不等式 $x^2+y^2<R^2$（注意，这里是严格“小于”）的点 (x,y) 的全体记作 D，显然 D 是平面上与原点的距离小于 R 的点 (x,y) 的全体，即是以原点为圆心以 R 为半径的开圆（图 1 1），因 D 不含有边界点，所以 D 是一个开区域．若 D 表示满足不等式 $x^2+y^2\leqslant R^2$（注意，这里是“小于或等于”号）的点 (x,y) 的全体，则 D 是以原点为圆心以 R 为半径的闭圆（图 1 2），因 D 含有全部边界点，所以它是一个闭区域．

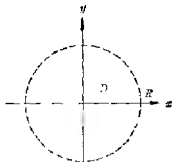


图 1 1

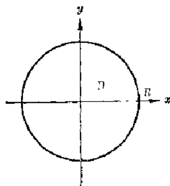


图 1 2

若 D 表示同时满足不等式 $a<x<b$ 和 $c<y<d$ 的点 (x, y) 的全体，则 D 是一个开矩形(图 1-3)，它不含有一个边界点，所以是开区域．若 D 表示同时满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $c\leqslant y\leqslant d$ 的点 (x, y) 的全体，则 D 是一个闭矩形(图 1-4)，它包含全部边界点，所以是闭区域．

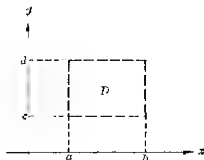


图 1-3

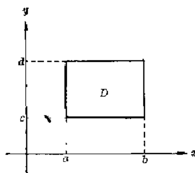


图 1-4

如 D 表示同时满足不等式 $0<x<1$ 和 $0<y<x$ 的点 (x, y) 的全体，要弄清 D 表示的是什么区域，我们先分别考察每一个不等式表示的是什么区域．第一个不等式 $0<x<1$，表示的是介于直线 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的一条开带子 (图 1-5)；第二个不等式 $0<y<x$，表示的是介于直线 $y=0$ 和 $y=x$ 之间的一个开角(图 1-6)，作为它们的公共部分 D，就是一个开的三角形(图 1-7)，因它不含边界点，所以是开区域．

若 D 表示同时满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant x$ 的点的全体，则它是一个闭的三角形 (图 1-8)，因它含有全部边界点，所以是闭区域．

若 D 表示同时满足不等式 $0<x<1$ 和 $0<y<1-x$ 的点 (x, y) 的全体，如上面一样讨论，可知它是一个开区域(图 1-9)，若 D 表示满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 的点 (x, y)

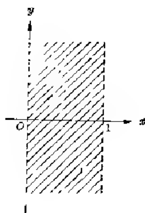


图 1 5

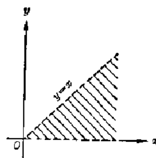


图 1 6

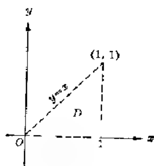


图 1-7

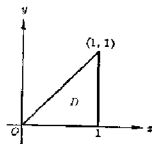


图 1 8

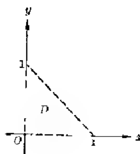


图 1 9

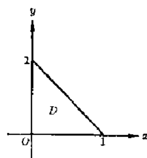


图 1 10

的全体，则它是一个闭区域(图 1-10)。

若 D 表示同时满足不等式 $x>0$, $y>0$, $x+y<1$ 的点 (x, y) 的全体，第一个不等式表示的是右半开平面，第二个不等式表示的是上半开平面，第三个不等式 $x+y<1$ 即 $y<1-x$，表示的是直线 $y=1-x$ 以下的半开平面(图 1-11)，作为三者的公共部分 D，仍是图 1-9 中所表示的开区域．同理 D：同时满足 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ 的点集表示的是图 1-10 中所表示的闭区域．

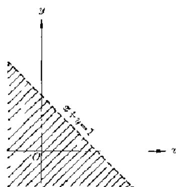


图 1-11

可见，平面上的开区域和闭区域要比直线上的开区间和闭区间复杂得多，它可以有各种各样的形状，而且同一个区域可以有几种表示式．我们仅举了几个很特殊的区域，还可以举出许许多多开区域和闭区域的例子，如 D：$x^2+y^2<+\infty$，这时 D 是全平面，因全平面没有边界点，我们可以说 D 包含了全部边界点，也可以说 D 不含边界点，所以 D 既是闭区域也是开区域，这是唯一具有两重性的区域，此外再也找不出一个平面区域，它既是闭区域又是开区域． 又如 D：满足 $0<x^2+y^2<+\infty$ 的点集，它表示除去原点的平面，因原点是 D 的边界点不属于 D，所以 D 是开区域．

以后我们把开区域简称为区域，闭区域理解成区域加上它的全部边界．由上面区域的例子可以看出，一个区域 D 具有下面两个特性：第一，若 A 点属于区域 D，则总可以取充分小的正数 $\delta>0$ 为半径，以 A 为圆心作一开圆，使此开圆全部属于 D；第二，若 A, B 是区域 D 内任意两点，则总可以作一

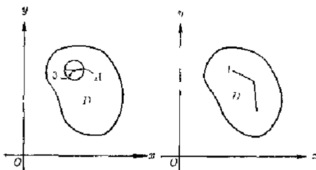


图 1·12

位于区域 D 内的折线联接 A, B 两点(见图 1·12).

从理论上来说,我们把这两个性质作为区域的定义,也就是说,凡平面点集 D 满足上述两条性质,则称 D 是区域. 满足第一条性质,说明集合 D 没有边界点;满足第二条性质,说明集合 D 是连通的. 若把 D 以外部分看成海洋, D 是海洋中的岛屿,则 D 只是一个岛屿,不是群岛.

习 题 一

1. 下面集合 D 是区域还是闭区域?并画出 D 的图形.

   1) D: $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<R^2$;

   2) D: $y\geqslant 0$, $x^2+y^2\leqslant R^2$;

   3) D: $a^2<x^2+y^2<b^2$;

   4) D: $x^2<y<\sqrt{x}$;

   5) D: $x^2\leqslant y\leqslant 1$;

   6) D: $x^2-x<y<x+1$;

   7) D: $x^2+4y^2<1$;

   8) D: $x^2-y^2>1$.

2. 设 D_1, D_2 是平面区域, D 表示它们的公共部分,记作

$$D=D_1\cap D_2,$$

   问 D 是否为一区域?

3. 若 D 中任意两点的联线也属于 D, 则称 D 是凸区域.

设 D_1, D_2 是平面凸区域，证明：

$$D = D_1 \cap D_2$$

也是凸区域.

4 问下列区域是否为凸区域.

1) D: $x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1$;

2) D: $1<x^2+y^2<4$;

3) D: $x^2<y<1$;

4) D: $x^2-y^2<1$;

1.2 函数的定义

我们先回顾一下一元函数的定义. 当变量 x 在其变化范围内取定一个值以后，总有唯一的 y 值与其对应，则称变量 y 是变量 x 的函数. 关于这个定义我们要指出两点：第一，"有唯一的 y 值与其对应"中的唯一两字，表示我们所定义的函数是单值函数，对于每一个 x 值，只有一个 y 的值与其对应. 但这决不能把它与"一一对应"混淆起来，因一一对应是指不同的 x，有不同的 y 值与其对应，如在 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时 $y\equiv 1$ 是单值函数，但不是一一对应的函数. 第二，"有唯一的 y 值与其对应"中的对应两字，是函数定义的核心. 通常以为有了公式才有函数，这是一种错觉，说到底都是有了对应关系才有函数. 如考察单位圆内圆心角与其所张的弦长有确定的对应关系，当圆心角一定时，其所张的弦之长也随之而定，我们就把圆心角的一半 (x) 与其所张弦长的一半 (y) 之间的对应关系，用符号记为 sin，这样就产生了一个公式 $y=\sin x$，当这个公式使用千万次以后，就会有一种本末倒置的错觉，似乎先有公式后才有正弦函数. 事实上把正弦函数扩充到任意角，也是先规定单位圆上转动半径与水平轴的夹角 (x) 与转动半径端点纵坐标 (y) 之间的对应关系，这个对应关系仍用记号 sin

来表示，如果事先不指明 x 与 y 之间的对应关系，符号 sin 也就会变得模糊不清. 所以确切地说，公式是对应关系的符号表示.

下面我们给出二元函数的定义：

定义 设在某一变化过程中有三个变量 x, y 和 z，对于变量 x、y 在其变化范围内取定的每一组值，总有变量 z 的一个值与其对应，则称变量 z 是变量 x, y 的二元函数，记作

$$z=f(x, y).$$

其中 x, y 叫做自变量，z 叫做因变量，x, y 取值范围叫做函数的定义域.

【例 1】 圆柱体的体积 V 和它的底半径 R，高 H 之间具有关系式：

$$V=\pi R^2 H,$$

当 R, H 取定一组正数值时，由上面公式总有 V 的一个值与其对应，所以按二元函数的定义，V 是 R, H 的一个二元函数，函数的定义域为：

$$R>0,\ H>0.$$

【例 2】 在一密封而有活塞的容器内充满着一定质量的气体，设该气体的体积为 V，压强为 P，绝对温度为 T，则根据气体方程知：

$$PV=RT \quad (R \text{ 为一常数}).$$

这个方程告诉我们变量 P, V, T 之间的依赖关系. 至于选取那两个变量作为自变量，完全依所讨论的问题来确定. 例如欲研究体积 V 对压强 P 和温度 T 的依赖关系，我们就把 P, T 看作自变量，这时 V 就是 P, T 的二元函数：

$$V=\frac{RT}{P}.$$

这个函数的定义域为:

$$P>0,\ T>T_0.$$

其中 T_0 是该气体的液化点.

【例 3】 $$z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

对平面上任意一点 (x, y), 若 $x^2+y^2\neq 0$, 则有值 $z=xy/(x^2+y^2)$ 与其对应, 若 $x^2+y^2=0$, 则有 $z=0$ 与其对应, 所以根据函数的定义, z 是 x, y 的一个二元函数, 定义域为全平面. 如果你觉得它不是一个二元函数或它是两个二元函数, 这说明你对定义的理解还不透, 还不善于从定义出发去考察问题, 而是凭某种习惯成见出发考察问题.

要判断变量 z 是否是变量 x, y 的函数, 只看它们之间是否有对应关系(根据这个对应关系, 当变量 x, y 给定一组值后, 就能定出 z 的值), 若存在这种对应关系, 我们就可以说 z 是 x, y 的函数. 至于这个对应关系是什么形状, 是如何表达出来的, 函数定义并不要求, 也不能作为我们判断是不是函数的依据. 如例 3 中 z 与全平面上的点 (x, y) 有确定的对应关系, 这对应关系在原点和非原点处表达形式是不同的, 但这并不影响它是一个二元函数.

例如 $z=C$ (C 为常数),

我们可以说它是一个 x, y 的二元函数, 因为对于变量 x, y 的每一组值, 都让 $z=C$ 这个值与之对应, 这是一种确定的对应关系, 按函数定义, $z=C$ 是一个 x, y 的二元函数, 它的定义域为全平面. 当然我们也可以说 $z=C$ 是一个三元函数, 甚至 n 元函数.

又如有一个一元函数

$$u=f(x)\quad(a<x<b),$$

假如我们在区域 D:

$$a<x<b \text{ 与 } -\infty<y<+\infty,$$

上来看的话，它就是区域 D 上的一个二元函数．因为对于区域 D 中每一组值 (x, y)，我们让 $u=f(x)$ 与之对应，这是一种确定的对应关系．所以 $u=f(x)$ 是 x, y 的一个二元函数，它的定义域是 D．当然我们也可以说，它是三维空间区域：$a<x<b$ 与 $-\infty<y<+\infty$ 与 $-\infty<z<+\infty$ 上的三元函数，或某一 n 维空间区域上的 n 元函数．

习 题 二

1．问下列表达式是否是 a、b 的二元函数．

1) $I=\int_0^1 (a+bx)^2\,dx$;

2) $I=\int_a^b (1+2x)^2\,dx$;

3) $I=\int_a^1 (a+bx)^3\,dx$;

4) $I=\begin{cases}1, & a>b,\\ 0, & a=b,\\ 1, & a<b.\end{cases}$

2．根据下列对应关系，写出函数式．

1) 对平面上每一点 (x, y)，用该点到原点的距离与之对应；

2) 对平面上每一点 (x, y)，用该点到 y 轴的距离与之对应；

3) 对平面上每一点 (x, y)，用该点的坐标之和与之对应；

4) 对平面上每一点 (x, y)，用该点的较大的坐标减去较小的坐标的值与之对应．

3．设 $z=f(x, y)$ 在区域 D：$a<x<b$ 和 $c<y<d$ 上有定义．

1) 若对于 (a, b) 中任一 x，将其固定后，把 $z=f(x, y)$ 看成 y 的一元函数后为一常数，问二元函数在 D 上是否为一常数；

2）若再对于(c, d)中的某一y，将其固定后，把$z=f(x, y)$看成x的一元函数后为一常数，问二元函数在D上是否为一常数。

4．设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当$y=1$时$z=x$，求函数f及z。[提示 $\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-1+2$。]

1.3 定义域

一元函数的定义域非常简单，主要是开区间，闭区间，而二元函数的定义域为平面上的区域、闭区域，或由几个区域组成，甚至可以是很一般的点集，即使是开区域，它的形状可以多种多样，要比一元情形复杂得多．二元函数与一元函数的差别，其原因之一就是由于定义域的不同引起的，所以要对二元函数的定义域加以专门的讨论．

若函数的自变量具有某种实际意义，应该根据它的实际意义来决定其取值范围，即由此来确定函数的定义域．如例2中温度T必须大于T_0，否则它不再是气体．对一般的函数来讲，只要使表达式有意义的自变量取值范围，就是函数的定义域，称为自然定义域．

【例4】 求函数

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

的定义域．

解：要使根式有意义，必须有

$$R^2-x^2-y^2\geqslant 0,$$

即

$$x^2+y^2\leqslant R^2,$$

所以定义域为一闭圆（图1-2）．

【例5】 求函数$z=\ln(x+y-1)$的定义域，并画图．

解：要使对数有意义，必须有

$$x+y-1>0,$$

满足上面不等式的点 (x, y) 的全体就是函数的定义域. 把上式改写成

$$y>1-x,$$

即可看出定义域是直线 $y=1-x$ 之上的那个半开平面(图 1-13).

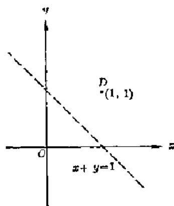


图 1-13

下面我们用另外办法来确定出不等式所表示的定义域 D. 比如我们要在世界地图上考察某一国家有多大, 我们只要把这个国家的国境线位置弄清楚, 也就知道这个国家有多大. 同样我们要确定区域 D, 只要把它的边界线画出来, 就能定出区域 D. 显然这个定义域 D 的边界线为直线 $x+y-1=0$, 直线把平面分成两部分, 在直线之上的部分称为上半开平面,在直线之下的部分称为下半开平面,究竟不等式 $x+y-1>0$ 表示的是上半开平面还是下半开平面呢?我们采用"以点示面"的办法来确定它, 任取一点, 比如说这点为 $(1, 1)$,将这点坐标代入不等式左端得

$$(x+y-1)\big|_{(1,1)}=1+1-1=1>0,$$

这表明我们所取的点位在定义域内, 所以定义域是包含点 $(1, 1)$ 的上半开平面. 若我们任取的点为 $(0, 0)$,将这点坐标代入不等式左端得

$$(x+y-1)\big|_{(0,0)}=0+0-1=-1<0,$$

这表明我们所取的点不在定义域内, 也就是说包含原点的下半开平面不是定义域. 因此定义域是上半开平面. 一般来说, 边界曲线把平面分成若干部分, 在每一部分任取一点, 然后代

入不等式检验，若不等式成立，表明包含该点的部分属于定义域，若不等式不成立，表明包含该点的部分不属于定义域.

【例 6】 求函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{x-y^2}}$$

的定义域，并画图.

解：要使表达式有意义，必须有

$$x-y^2>0,$$

为了得出定义域的图形，先画出定义域的边界曲线 $x-y^2=0$，它是一条以原点为顶点，以 x 轴为对称轴的抛物线. 曲线把平面分成两部分，一部分是抛物线之内的区域，一部分是抛物线之外的区域. 为了确定那一个区域是定义域，我们任取一点(1, 0)，将它代入不等式，得

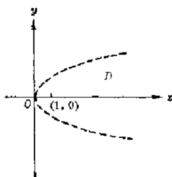


图 1-14

$$(x-y^2)\big|_{(1,0)}=1-0^2=1>0,$$

这表明点 (1, 0) 在定义域 D 内，所以定义域 D 是包含(1, 0)点的抛物线内部区域（图 1-14).

习 题 三

1. 求出下列函数的定义域，并画图.

   1) $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$；

   2) $z=\ln(-x-y)$；

   3) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-r^2}$, $(R>r>0)$；

   4) $z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

   5) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

2. 设区域 D 的边界为曲线 $f(x, y)=0$，若函数 $f(x, y)$ 分别满足

1) $f(-x, y)=f(x, y)$;

2) $f(x, -y)=f(x, y)$;

3) $f(-x, -y)=f(x, y)$;

4) $f(x, y)=f(y, x)$.

问区域 D 各有什么性质?

1.4 函数的几何表示

在讲述一元函数时，我们总是把概念的分析表达与它的几何解释紧紧地联系在一起的，如讲导数概念时用切线的斜率引入，讲定积分概念时用曲边梯形的面积引入，这样做能使一些抽象的概念得到具体形象的理解．在讨论一些定理时，也总是求助于几何上的考虑，找出证明的途径，然后再用分析式子把它一步步推导出来，如极值的必要条件和微分中值定理证明都是这样做的．现在讲述多元函数，我们仍贯穿这一精神，把分析与几何两者密切地联系起来．

对二元函数，我们可以给它一个几何解释．设给定二元函数

$$z=f(x, y),$$

先建立空间直角坐标系 $O-xyz$，在 xy 平面上画出函数的定义域 D，D 可以是区域也可以是闭区域．对于 D 内任意一点 $P(x, y)$，在空间可以画出一点

$$M(x, y, f(x, y))$$

与之对应(见图 1-15)．当点 P 在定义域 D 内变动时，相应的点 M 就在空间中变动；当点 P 取遍整个定义域 D 时，点 M 就在空间描绘出一张曲面

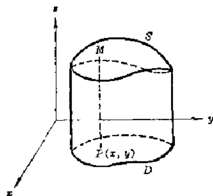


图 1-15

S，这个曲面 S 就叫做函数的图象．正如观看大型团体操时，表演者有的蹲有的站，组成一幅波浪起伏的曲面．这某一瞬间的曲面，就是该瞬间表演者高度这个二元函数的几何表示．

由上所述，给定一个二元函数 $z=f(x, y)$，就是给定曲面上各点的竖坐标，也就是给定一张曲面．当两个二元函数不同时，它们所表示的曲面就不一样，也就是说每一个二元函数都有它自己特有的曲面，所以我们也常把二元函数叫做曲面，两者不加区分．

【例 7】 作函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图象．

解：在例 4 中已求出函数的定义域为($R=1$)

$$x^2+y^2\leqslant 1,$$

即为 xy 平面上的闭单位圆．

已知 $x^2+y^2+z^2=1$ 是以原点为圆心，以 1 为半径的球面，所以函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

的图象是以原点为圆心的单位球面的上半部分(图 1-16)．由图象看出函数在原点处有最大值．

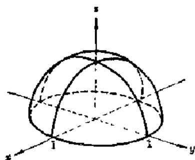


图 1-16

这个图象关于 yz 平面和 xz 平面都是对称的．一般来说，若在表示定义域的不等式和二元函数式中，将 x 换成 $-x$ 后两者形式不变，则曲面关于 yz 平面对称；若在表示定义域的不等式和函数式中，将 y 换成 $-y$ 后两者形式不变，则曲面关于 xz 平面对称．如果只是函数式中把 x 换成 $-x$ 形式不变，而表示定义域的不等式中将 x 换成 $-x$ 时，

形式起了变化，则得不出曲面关于 yz 平面是对称的.

【例 8】 作函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图象.

解：函数的定义域为

$$x^2+y^2\geqslant 0,$$

即为全平面. 已知

$$z^2=x^2+y^2$$

是以原点为顶点，上下无限伸展的圆锥面，因此函数

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

的图象是以原点为顶点，开口向上的圆锥面(图 1-17). 由图看出函数在原点处有最小值. 容易验证表示函数的曲面，关于 yz 平面和 xz 平面是对称的.

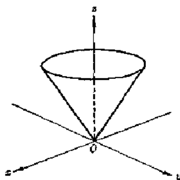


图 1-17

【例 9】 作函数 $z=xy$ 的图象.

解：函数的定义域为全平面. 要想知道函数的图象是什么样的曲面，先回想一下曲线情形. 给定一条曲线 $y=f(x)$，要想知道它的图象，最原始的办法是在平面上画几个点，然后把这些点凑在一起，即可看出曲线的大致形状，这称描点作图法. 相应地有二元函数的切片法.

我们用 $z=-2, -1, 0, 1, 2$ 五个平面去截这个曲面，得到五条空间曲线:

$$\begin{cases} z=-2, \\ xy=-2, \end{cases} \begin{cases} z=-1, \\ xy=-1, \end{cases} \begin{cases} z=0, \\ xy=0, \end{cases} \begin{cases} z=1, \\ xy=1, \end{cases} \begin{cases} z=2, \\ xy=2. \end{cases}$$

前两条为双曲线，因 $z<0$ 所以曲线在 xy 平面之下，又因 $xy<0$，所以曲线在 xy 平面二、四象限之下；中间一条即为 x

轴和 y 轴，说明曲面过 x 轴和 y 轴，除此以外，曲面与 xy 平面再无交点；后两条也是双曲线，因 $z>0$，所以曲线在 xy 平面之上，又因 $xy>0$，所以曲线在 xy 平面一、三象限之上.

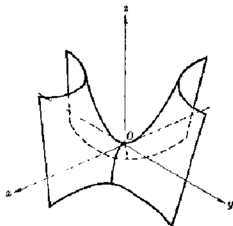


图 1-18

再用 $x-y$ 平面去截，得到截线为

$$\begin{cases} x=y, \\ z=x^2. \end{cases}$$

它是一条空间抛物线，开口向上．用 $x=-y$ 平面去截，得到截线为

$$\begin{cases} x=-y, \\ z=-x^2, \end{cases}$$

也是一条空间抛物线，开口向下.

根据这些曲线，我们可以想象出曲面的大致形状，它是一张马鞍形曲面，称为单叶双曲面（图 1-18）．由图看出，函数在原点不是极大值也不是极小值.

三元函数 $u=f(x, y, z)$ 已没有几何解释，但我们仍保留二元函数中的一些几何术语，如

$$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2},$$

是四维空间中的半径为 R 的上半球面．从这个意义上来说，多元函数也有它的几何意义.

习 题 四

1．作下列函数的图形.

1) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$；

2) $z=x^2+4y^2$；

3) $z=x^2-y^2$;

4) $z=\sqrt{xy}$.

2 问下列函数的图形有什么性质：

1) $z=f(x^2+y^2)$;

2) $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

第二节 极限与连续

2.1 极限(全面极限)

先复习一下一元函数的极限．设函数$f(x)$在$x=x_0$的附近有定义（在x_0点可以没有定义），当动点x趋近x_0时，若$f(x)$趋近某一数A，则称$x\to x_0$时$f(x)$的极限是A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

这是一种直观的，描述性的定义，然而它是一个基本的定义．利用这个术语就可进一步对大量的现象进行数学分析的描述，例如在定积分的定义中，我们用阶梯形逼近曲边梯形，先求出区间分成有限段时阶梯形的面积，再指出无限细分时阶梯形面积的极限就是曲边梯形的面积．从而通过无限的变化趋势确定出有限的曲边梯形面积．这种极限思想是整个微积分的基础．

下面我们先算几个二元函数的极限．

【例 1】 $f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，当$(x, y)\to(0, 0)$时，$f(x, y)$的极限是否存在？

解法一：函数$f(x, y)$在除去原点的全平面上定义，讨论函数在原点的极限时，函数在原点是否有定义并不影响我们对问题的讨论．

当$(x, y)\neq(0, 0)$时，有

$$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\sqrt{x^2}=|x|,$$

即

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1,$$

这表示当$(x, y)\to(0, 0)$时，因子$x/\sqrt{x^2+y^2}$是有界变量，而$(x, y)\to(0, 0)$时，必有$y\to 0$，所以$(x, y)\to(0, 0)$时，因子y是无穷小量．根据无穷小量的性质即得：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

解法二：把问题化到极坐标考虑．令

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

则$(x, y)\to(0, 0)$等价于$r\to 0$．这时

$$f(x, y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\sin\theta\cos\theta.$$

当$r\to 0$时，注意式中的θ不是常数(否则动点是沿一条射线趋于原点)，但不管$r\to 0$时，θ怎么变，因子$\sin\theta\cos\theta$总是有界变量，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x, y)=\lim_{r\to 0}(r\sin\theta\cos\theta)=0.$$

【例2】 求极限

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}.$$

解法一：把它化到极坐标考虑．这时$x\to+\infty$, $y\to+\infty$等价于$r\to+\infty$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$．又

$$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=r^2e^{-r(\sin\theta+\cos\theta)}.$$

当$0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1,$$

所以
$$0<r^2e^{-r(\sin\theta+\cos\theta)}\leqslant r^2e^{-r},$$

由 $\lim\limits_{r\to+\infty}r^2e^{-r}=0$，得

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\0<\theta<\frac{\pi}{2}}}r^2e^{-r(\sin\theta+\cos\theta)}=0,$$

因此
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0.$$

解法二：这个解法用到这样一件事实，如果一元函数极限存在：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

则把 $f(x)$ 看成二元函数时极限也存在，即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x)=A.$$

根据极限的四则运算，就有：

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}x^2e^{-x}\cdot\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}e^{-y}+\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}y^2e^{-y}\cdot\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}e^{-x}=0\cdot0+0\cdot0=0.$$

通过上面的例子，我们可以得出二元函数极限的概念：不管动点 (x, y) 以什么方式趋于 (x_0, y_0)，也不管动点 (x, y) 沿什么样路径趋于 (x_0, y_0)，若函数 $f(x, y)$ 都趋近于 A，则称当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x, y)=A.$$

若动点 (x, y) 沿两条不同的路径趋于 (x_0, y_0) 时，$f(x, y)$ 分别趋于两个不同的数，这时我们就能说，当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$

时，函数 $f(x, y)$ 的极限不存在．因为它破坏了极限定义中的要求．

【例 3】 $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，问函数的极限是否存在．

解：粗略地看，当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，分子与分母趋于零的速度差不多，如果有极限的话极限不会是零．现在我们令动点 (x, y) 沿直线 $y=kx(k\neq0)$ 趋于 $(0, 0)$，这时 $(x, y)\to(0, 0)$ 等价于 $x\to0$，于是有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0.$$

由此看出，当动点沿直线 $y=x$ 和 $y=2x$ 趋于 $(0, 0)$ 时，函数分别趋近于值 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{2}{5}$，所以当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，函数的极限不存在．

习 题 五

1．求下列极限：

1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；

2）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；［提示：利用 $|\sin\theta|\leqslant|\theta|$．］

4）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$；［提示：利用 $2|ab|\leqslant a^2+b^2$．］

5）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2 当$(x, y)\to(0, 0)$时，下列函数极限是否存在：

1) $f(x, y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

2) $f(x, y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. ［提示：考虑抛物线路径.］

2.2 累次极限

上面所讨论的极限，是当动点(x, y)的坐标x, y，同时分别趋于x_0, y_0时所得到的，我们称它为全面极限，也常记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A, \qquad (x, y)\neq(x_0, y_0).$$

此外，我们还可以讨论x, y先后相连地趋于x_0, y_0时极限，我们称它为累次极限.

若对任一固定的$y(y\neq y_0)$，当$x\to x_0$时，$f(x, y)$作为x的一元函数极限存在，这个极限值依赖于固定的y，对不同的y，这个极限值可以不一样．根据一元函数的定义，当$x\to x_0$时，$f(x, y)$的极限值是y的函数，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y)=\varphi(y).$$

又$y\to y_0$时，一元函数$\varphi(y)$的极限存在并等于A，即

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A.$$

那么称A为$f(x, y)$先对x，后对y的累次极限，记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)=A.$$

同样可以定义先对y，后对x的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y).$$

累次极限概念，事实上是把二元函数问题化为一元函数问题，连续地求两次一元函数的极限，本质上属于一元函数极

限的范畴；全面极限虽然形式上与一元极限相似，但概念上不能归结为一元函数极限，它是推广了一元函数的极限概念，而不是简单地应用一元函数的极限概念．通过下面的例子可以看出这两种极限的区别．

【例 4】 $f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$，当$(x, y)$在其自然定义域而$\to(0, 0)$时，问：全面极限是否存在？又两个累次极限是否存在？

解：函数$f(x, y)$在除去两个坐标轴后的点集（即其自然定义域）上有定义．当$(x, y)\to(0, 0)$时，等价于$x\to0$, $y\to0$，所以当$(x, y)\to(0, 0)$时有$x+y\to0$，根据有界变量与无穷小量乘积仍为无穷小量得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

这说明函数的全面极限存在，且为零．

但对任意固定的$y\neq0$，由于

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0,$$

而

$$\lim_{x\to0}y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

不存在，所以极限

$$\lim_{x\to0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

不存在，因而先对x后对y的累次极限也就不存在．由x与y的对称性，可知先对y后对x的累次极限也不存在．这例说明函数的全面极限存在，而两个累次极限可以不存在．

【例 5】 $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$，问函数在原点的累次极限是否存在．

解：由例 3 知函数在原点的全面极限不存在．现在考察它的累次极限．

任意固定 $y \neq 0$，可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0 \cdot y}{0+y^2} = 0.$$

即相当于累次极限定义中的 $\varphi(y)=0$，因而

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y \to 0} \varphi(y) = 0.$$

由对称性可知

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

这例子说明函数的两个累次极限存在，而且相等，但函数的全面极限可以不存在．

【例 6】 $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$．问函数在原点的全面极限和累次极限是否存在．

解：如同例 3 一样的办法，可以证明这个函数在原点的全面极限不存在．

任意固定 $y \neq 0$，可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1,$$

所以
$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -1.$$

任意固定 $x \neq 0$，可得

$$\lim_{y \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1,$$

所以
$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

这例说明即使两个累次极限存在，其值可以不等．它指出了一件很重要的事，凡遇到先后两种运算时，不能轻易地交换顺序，只有在一定条件下才能交换顺序，否则就会得出错误的结果．事实上我们在一元函数时已经遇到过类似的情况，只是那时出现的极限形式不那么明显，如

$$\int_a^x f'(t)dt \neq \left(\int_a^x f(t)dt\right)',$$

两者相差一常数 $f(a)$．因为上式的左边是先求导数再进行定积分，而右边是先求定积分，再求导数，所以这说明导数运算与积分运算不能随便交换顺序．而导数与定积分本质上都是极限运算．所以这个例子也就是"累次极限不能轻易交换顺序"的一种反映．

2.3 连续性

由上段知道，二元函数的极限是刻划函数一点附近的性质，如果极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$

存在，表明函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点附近的函数值与 A 可以充分接近，所以在该点附近函数值的变化值落在 A 的邻域内．若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都有极限，是否函数在整体上有很好的性质呢？例如函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2=0, \\ 0, & x^2+y^2\neq 0. \end{cases}$$

这个函数在全平面上每一点都有极限，而且极限值为 0，但显然这个函数的整体性质是不理想的，它在原点处函数有一间断．这表明极限这个局部概念不足以保证函数在整体上有好的性质．为此，我们要引入连续的概念，往下可以看出，通过

这个局部概念可以保证函数在整体上有好的性质.

下面我们给出二元函数连续的定义.

定义 设 $f(x, y)$ 在区域或闭区域 D 上定义, 当动点 (x, y) 在 D 内趋于定点 (x_0, y_0) 时, 动点的函数值 $f(x, y)$ 趋于定点的函数值 $f(x_0, y_0)$, 即

$$\lim_{x,y \to x_0,y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称二元函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续. 否则, 就说 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不连续或间断.

连续与极限的差别, 仅在于前者要求极限值是该点的函数值. 对连续的定义也常采用增量的形式. 记动点 (x, y) 为 $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, 并记

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

则连续定义可改写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

上式表明, 若函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续, 则当自变量 x, y 有微小变动时, 引起因变量的变动也很微小.

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 的每一点处连续, 我们就说函数在区域 D 上连续. 当 D 是闭区域时, (x_0, y_0) 为 D 的边界点, 在连续定义中只能要求动点 (x, y) 从 D 内趋于 (x_0, y_0), 不可能要求动点从四面八方趋于 (x_0, y_0). 区域上连续函数的图象是一张连续的曲面.

利用极限的四则运算, 我们可以判断连续函数经过四则运算后是否仍为连续, 对此我们有如下的定理:

定理 1 设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在区域 D 上连续, 则 $f(x, y) \pm g(x, y)$, $f(x, y)\cdot g(x, y)$, $f(x, y)/g(x, y)$ (这时要求 g

在 D 上不为零)也在区域 D 上连续.

定理 2 1) 设 $f(t)$ 在区间 (a, b) (或 $[a, b]$) 上一元连续,又 $t=t(x, y)$ 在区域 D 上连续, 且函数值 t 属于区间 (a, b), 则复合函数 $f(t(x, y))$ 在 D 上连续.

2) 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 又 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且函数值组成的点 (x, y) 属于区域 D, 则复合函数 $f(x(t), y(t))$ 在 (a, b) 上连续.

3) 设 $f(s, t)$ 在区域 Ω 上连续, 又 $s=s(x, y)$, $t=t(x, y)$ 在区域 D 上连续, 且函数值组成的点 (s, t) 属于区域 Ω, 则复合函数 $f(s(x, y), t(x, y))$ 在 D 上连续.

利用这两个定理, 我们可以说明所有二元初等函数在其自然定义域上是连续的. 首先注意下面的事实:

设 $z=f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的一元连续函数, 它的图象是 xz 平面上的一条连续曲线. 则把 $z=f(x)$ 看成闭区域 D:

$$a\leqslant x\leqslant b \quad 与 \quad -\infty<y<+\infty$$

上的二元函数时, 是一个 D 上的二元连续函数, 它的图象是把曲线 $z=f(x)$ 沿 y 轴方向水平移动而得的曲面.

【例 7】 证明 $f(x, y)=x^2+y^2$ 在全平面上连续

解: 因一元函数 x^2 与 y^2 分别在 x 轴上与 y 轴上一元连续, 把它们看成二元函数, 则两个二元函数 x^2 与 y^2 在全平面上连续, 应用定理 1, 知函数 $f(x, y)=x^2+y^2$, 在全平面上连续.

【例 8】 证明 $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在除去原点的平面上连续.

解: 同上例, 我们可以说明分子 xy, 分母 x^2+y^2 在全平面上连续, 应用定理 1 时, 要除去分母为零的点, 现在分母只

在原点为零，所以$f(x, y)$在除去原点的平面上连续。

【例 9】 证明$f(x, y)=\ln(x+y-1)$在其定义域D: $x+y-1>0$上连续.

解：因函数$g(t)=\ln t$，在$t>0$上一元连续，而函数

$$t=t(x, y)=x+y-1,$$

在D上连续，且取值大于零，应用定理2，复合函数

$$f(x, y)=g(t(x, y))=\ln(x+y-1)$$

在其定义域D上连续.

对具体的二元函数，总可以运用一元函数的连续性，及二元连续函数的四则运算与复合运算，来说明二元函数在其定义域上是连续的.

习 题 六

1. 问下列函数在定义域上是否连续：
   1) $f(x, y)=\sqrt{|xy|}$;
   2) $f(x, y)=\begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$
   3) $f(x, y)=\sin(x^2+y^2)$;
   4) $f(x, y)=x^y$.
2. 设$f(x, y)$在区域D上连续，证明：$|f(x, y)|$在区域D上连续.[提示：利用定理2.]
3. 设$f(x, y)$, $g(x, y)$在区域D上连续，证明：函数

   $$\max(f(x, y), g(x, y)),$$
   $$\min(f(x, y), g(x, y))$$

   也在区域D上连续.

   $\left[\text{提示：} \max(a, b)=\dfrac{(a+b)+|a-b|}{2}.\right]$
4. 设$f(x, y)$在区域D上连续，证明：$f(x, y)$可以表示成两个非负连续函数之差.

2.4 连续函数的性质

上面我们说到函数在某一点的连续是一个局部概念；但如果函数在某一区域中点点连续，那末这将导致函数在整个区域中有某种整体性质. 连续函数有三个最重要的整体性质，我们只介绍其中的两个，这就是最大、最小值性质与取中间值性质.

定理 3 设函数 $z=f(x, y)$ 在一个有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上取到它的最大值与最小值.

定理的几何意义是：一张在有界闭区域 D 上的连续曲面，必定有最高点与最低点，最高点与最低点可以在 D 的内部，也可以位于 D 的边界上.

定理要求函数连续外，还要求区域 D 是有界的、闭的，这两条缺一不可，否则定理的结论就不一定成立. 如函数

$$z=\frac{1}{xy},$$

在有界区域 D：$0<x<1$ 与 $0<y<1$ 上连续，当动点 (x, y) 在 D 内趋于 $(0, 0)$ 点时，函数值

$$z=\frac{1}{xy}\to+\infty,$$

这说明若去掉 D 是闭的条件，函数在 D 上可以没有最大值. 又对 D 内的点 (x, y) 有

$$z=\frac{1}{xy}>1,$$

而且当 (x, y) 在 D 内趋于 $(1, 1)$ 时，$z=\frac{1}{xy}\to1$，这说明函数在 D 内没有最小值.

定理可以推广至曲线情形. 设 $f(x, y)$ 在平面曲线 L 上

定义，对于 L 上任意固定的点，当动点沿曲线 L 趋于该点时，动点的函数值趋于该点的函数值，则称 $f(x, y)$ 在该点连续．若 $f(x, y)$ 在 L 的每一点连续，称 $f(x, y)$ 在 L 上连续．若 $f(x, y)$ 在有界闭曲线 L（L 可以是封闭曲线，也可以是包含两个端点的曲线弧）上连续，则 $f(x, y)$ 在 L 上取到它的最大值与最小值．

若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，L 是 D 的边界，容易看出 L 是有界闭曲线．如 D 为闭圆，L 就是这个闭圆的圆周；若 D 是闭的圆环，L 就是内外两个圆周，对一般的有界闭区域 D，L 可以是一条或若干条有界闭曲线．把 $f(x, y)$ 看成 L 上定义的函数时，显然它仍是 L 上的连续函数．

定理 4 设函数 $z=f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，常数 C 介于函数的最大值与最小值之间，则在 D 内总可找到一点 (ξ, η)，使得

$$f(\xi, \eta)=C.$$

定理的几何意义是：曲面有一最高的峰，又有最低的谷，介于峰与谷之间的任一高度 C，曲面上总有一点恰好等于高度 C，所以人们总可以沿着这个曲面，从谷一直爬到峰．

【证明】 证明的想法是在闭区域 D 上作一条曲线，当限于这条曲线上考虑函数时，就可把二元函数取中值问题，化为一元函数取中值问题．

设函数 $f(x, y)$ 在 D 内 (x_1, y_1) 点达到它的最大值 M：

$$f(x_1, y_1)=M.$$

在 D 内 (x_2, y_2) 点达到它的最小值 m：

$$f(x_2, y_2)=m.$$

再在 D 内作一条连续曲线 l，联结 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 两点（图 1-19），设 l 的方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$$

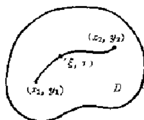


图 1 19

参数 t_1 对应于最大点 (x_1, y_1)：

$$\begin{cases} x_1=x(t_1), \\ y_1=y(t_1). \end{cases}$$

参数 t_2 对应于最小点 (x_2, y_2)：

$$\begin{cases} x_2=x(t_2), \\ y_2=y(t_2). \end{cases}$$

然后考虑一元函数

$$F(t)=f(x(t), y(t)), \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

由定理 2 知 $F(t)$ 在闭区间 $[t_1, t_2]$ 上连续，且有

$$F(t_1)=f(x(t_1), y(t_1))=f(x_1, y_1)=M,$$

$$F(t_2)=f(x(t_2), y(t_2))=f(x_2, y_2)=m.$$

而 C 介于 M 与 m 之间，根据一元连续函数的中间值定理，总可找到 $t^*(t_1<t^*<t_2)$，使得

$$F(t^*)=C.$$

令 $\xi=x(t^*)$, $\eta=y(t^*)$，则有

$$F(t^*)=f(x(t^*), y(t^*))=f(\xi, \eta)=C. \ ▌$$

由定理证明可以看出，只要 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续，常数 C 介于 D 上某两点的函数值之间，则在 D 上总可找到一点 (ξ, η) 使得 $f(\xi, \eta)=C$. 所以定理 4 中要求 D 是有界和闭的条件不是本质的，只要 D 是区域就行.

2.5 关于连续性的补充

直到前面为止，我们只是把一元连续函数的概念和定理，改造成二元连续函数的概念和定理，这种改造并没有多大的困难. 在讲述一元连续概念时，我们还详细地讨论间断点的

类型：其一是左右极限存在而且相等，称为第一类间断点或可去间断点；其二是左、右极限存在但不相等，称为第二类间断点；其余类型的间断点统称为第三类间断点。通过间断点的讨论，使我们从反面加深了对连续概念的理解。那末对二元函数是否也应讨论间断点的分类呢？我们说具体情况要具体分析，在一元函数中第一类间断点意思不大，实质上可以不算什么间断点，主要是第二、三类间断点，第二类间断点所以重要，是因为它与单调函数密切联系在一起，因此需要把它单独划为一类加以讨论。而二元函数没有单调概念，所以没有必要按一元函数的框框去划分第二、三类间断点。但二元函数有两个自变量，我们应根据这一特点，来考虑它的间断情形，从而从反面加深我们对连续概念的理解。

考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

这个函数的定义域为全平面。

任意固定 $y=b$，若 $b\neq 0$，得到一元函数

$$f(x, b)=\frac{bx}{x^2+b^2}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

若 $b=0$，得到一元函数

$$f(x, 0)=0\quad(-\infty<x<+\infty),$$

所以任意固定 $y=b$，得到的是 x 的一元连续函数。

任意固定 $x=a$，若 $a\neq 0$，得到一元函数

$$f(a, y)=\frac{ay}{a^2+y^2}\quad(-\infty<y<+\infty),$$

若 $a=0$，得到一元函数

$$f(0, y)=0\quad(-\infty<y<+\infty).$$

所以任意固定 $x=a$，得到的是 y 的一元连续函数.

这个函数分别关于 x 和 y 都是一元连续的，由此能否得出 $f(x, y)$ 是二元连续函数呢？用形象的话来说，这个曲面是用一根根连续的经线和纬线编织成的，那末这个曲面是否是一张连续曲面呢？单凭生活经验，我们可能会说这张曲面是连续的，但从严格逻辑出发，在例 3 已证明函数在原点极限不存在，当然更谈不上连续，所以由一条条连续的经线和纬线编成的曲面，可以不是一张连续的曲面.

习 题 七

1．证明：函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

限制在任意一条过原点的直线上考察时，是一元连续函数．但 $f(x, y)$ 不是一个二元连续函数.

2．设 D 是平面上有界闭区域，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 外一点，问 D 内是否有一点离 P_0 最近，有一点离 P_0 最远，为什么？

3．设函数 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，且在 D 上有

$$f(x, y)\leqslant g(x, y),$$

证明：

$$\max_{(x,y)\in D} f(x, y)\leqslant \max_{(x,y)\in D} g(x, y),$$

$$\min_{(x,y)\in D} f(x, y)\leqslant \min_{(x,y)\in D} g(x, y).$$

即 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值小于等于 $g(x, y)$ 在 D 上的最大值；$f(x, y)$ 在 D 上的最小值小于等于 $g(x, y)$ 在 D 上的最小值.

4．设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，G 为包含在 D 内的有界闭域，证明：

$$\max_{(x,y)\in G} f(x, y)\leqslant \max_{(x,y)\in D} f(x, y),$$

$$\min_{(x,y)\in G} f(x, y)\geqslant \min_{(x,y)\in D} f(x, y).$$

5．设 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续，(x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 D 上的几

个点，证明：总可以在 D 上找到一点 (ξ, η)，使得

$$f(\xi, \eta)=\frac{f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)+\cdots+f(x_n, y_n)}{n}.$$

6. 设平面曲线 $f(x, y)=0$ 把平面分成若干个区域，D 为其中之一区域，(x_0, y_0) 为 D 中一点，若 $f(x_0, y_0)>0$，证明：对于 D 中任意一点 (x_1, y_1) 皆有

$$f(x_1, y_1)>0.$$

第三节　偏导数及其应用

3.1 偏导数

前两节的内容，可以说是为讨论多元函数微分法作准备，从这节开始进入多元函数微分法的讨论．多元函数微分法中有两个重要的问题：一个是求最大、最小值问题，或称最优化问题；一个是求曲面的切平面问题，或称线性逼近问题．微分法中其它问题都与这两个问题密切相联系．这节我们先讨论前一个问题．一元函数时，我们用导数解决了求极值问题，想把这个方法推广到多元函数求极值问题，就要引入偏导数的概念．

在讨论多元函数极限时，一种是让 x, y 同时变，由此得出的极限称为全面极限，一种是先固定一个只让一个变，由此得出的极限称为累次极限．这两种考虑问题的方法是多元函数中的两把刀子，我们经常要用这两把刀子来解剖问题．后一把刀子更好使一些，我们先用后一把刀子来解剖多元函数的微分问题．

既提出了问题，又找到了解决问题的方法．下面我们分两步解决多元极值问题．

设在区域 D 上给定函数

$$z=f(x, y),$$

(a, b)为D中一点，因D是区域，所以一定存在一个以(a, b)为圆心的小圆属于区域D. 固定$y=b$，得到x的一元函数

$$z=f(x, b),$$

并设这个一元函数在$x=a$点导数存在；又固定$x=a$，得到变量y的一元函数

$$z=f(a, y),$$

并设这个一元函数在$y=b$点导数存在，于是就有下面定义.

定义 在区域D上给定二元函数$z=f(x, y)$及一点(a, b)，称一元函数$z=f(x, b)$在a点的导数，为二元函数$f(x, y)$在(a, b)点关于x的偏导数，记作

$$f'_x(a, b) \quad 或 \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}.$$

相应地，我们称一元函数$z=f(a, y)$在b点的导数，为二元函数$f(x, y)$在(a, b)点关于y的偏导数，记作

$$f'_y(a, b) \quad 或 \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}.$$

上面关于偏导数的前一个记号中，函数f的右下角必须注明相应的自变量，表示对该变量求偏导数. 后一个记号(可以分别念作"偏f偏x"和"偏f偏y")，必须理解成一个整体的符号，不能看成一个分数，因为对单独的∂f与∂x、∂y并没有赋予它独立的意义.

如果函数$z=f(x, y)$在区域D的每一点，都可以求两个偏导数，那末它在(x, y)点的偏导数记为：

$$f'_x(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

$$f'_y(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

有时为了简单起见，干脆就记作

$$f'_x \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

及

$$f'_y \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

对于D中每一点(x, y)，都有两个偏导数与其对应，根据函数概念，偏导数就是区域D上的二元函数。这样由一个二元函数$f(x, y)$，可以导出两个二元函数$f'_x(x, y)$与$f'_y(x, y)$。

由偏导数定义可以看出，求偏导数的运算总是归结到对某单变量函数求导数，所以没有什么新的技巧。下面通过例子来说明偏导数的求法。

【例1】 求$z=x^2+y^2$的偏导数。

解：对x求偏导数时，把y看成常数，即得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x.$$

对y求偏导数时，把x看成常数，即得：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y.$$

【例2】 求$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$的偏导数。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

【例3】 求$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$的偏导数。

解：因$z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2)'_y}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

【例 4】 求 $z=x^y$ 的偏导数，定义域 D: $x>0$ 与 $y>0$.

解:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^y)'_x=yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^y)'_y=x^y\cdot\ln x.$$

或把 $z=x^y$ 改写成 $z=e^{y\ln x}$，于是:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y\ln x}(y\ln x)'_x=\frac{y}{x}e^{y\ln x}=\frac{y}{x}x^y=yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln x}(y\ln x)'_y=e^{y\ln x}\cdot\ln x=x^y\cdot\ln x.$$

【例 5】 求 $u=\frac{1}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解: 这题若消去中间变量 r，得到 u 是 x, y, z 的三元函数，然后分别求偏导数，这样做当然可以，但有时不是一种可取的方法. 我们可以充分利用中间变量，使运算和结果显得简单些. 如

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}.$$

后两个偏导数不必再求，直接由函数的对称性，可得:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

【例 6】 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

的偏导数.

解：当点$(x, y)\neq(0, 0)$时，该点的偏导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(x^2+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

求$(0, 0)$点偏导数时，注意到

$$f(x, 0)=0 \quad (-\infty<x<+\infty),$$

所以
$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}=0,$$

同理
$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}=0.$$

这个函数在原点不连续，但原点的两个偏导数存在. 这并不奇怪，因为偏导数只刻划函数沿x与y方向的变化率，并不能给出函数沿其它方向的变化情况.

习 题 八

1 求下列函数的偏导数：

1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;　　2) $z=xy+\frac{x}{y}$;

3) $z=\frac{x}{y^2}$;　　4) $z=x\sin(x+y)$;

5) $z=\frac{\cos x^2}{y}$;　　6) $z=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$;

7) $z=\ln(x+y^2)$;　　8) $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$;

9) $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　10) $u=\frac{1}{r}e^{-r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

11) $u=(xy)^z$;　　12) $u=z^{xy}$.

2 求下列函数在指定点的两个偏导数：

1) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 于$(1, 0)$, $(0, 1)$处;

2) $z=x+y+(y-1)\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$ 于(0, 1)处.

3. 求
$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
的偏导数，并证明偏导数有界.

4. $z=\frac{x-y}{x+y}\ln\frac{y}{x}$，证明：函数 z 满足方程
$$xz'_x+yz'_y=0.$$

5. 证明：函数 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$ 满足方程
$$xz'_x+y^2z'_y=0.$$

6. 证明：函数 $z=x^nf\left(\frac{y}{x^2}\right)$（其中 f 为可微函数）满足方程
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

3.2 通常极值

求一元函数的最大(小)值时，我们先求出区间内部的所有极值，然后与区间端点的函数值比较，这些值中最大的就是最大值，最小的就是最小值．求多元函数在闭区域上的最大(小)值，我们也是先设法求出区域内部的所有极值．为此，我们先要给出多元函数的极值点定义．

定义 设函数 $z=f(x, y)$ 在 (a, b) 点附近有定义，并存在一正数 $\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ 时，有
$$f(a, b)>f(x, y)$$
$$(f(a, b)<f(x, y)),$$
则称函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 有严格极大(小)值，(a, b) 称为严格极大(小)值点．若上式中"$>$($<$)"号改为"$\geqslant$($\leqslant$)"号，则称 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 有极大(小)值，(a, b) 称为极大(小)值点．

由定义可以看出，极值与最大、最小值不同，后者是整体性概念，前者是局部性概念．讨论极值时只要存在一个以(a, b)为中心的邻域，至于邻域的大小对我们的问题没有影响．如珠穆朗玛峰的高度是我国拔海高度的最大值，只有极少数人达到过这个最大值；但只要登过高，爬到过任一个山顶的人几乎都到过我国拔海高度的极大值．

我们往下就要看出，在数学演算上求极值要比求最大（小）值容易．因为在极值的定义中，令$y=b$，这样就得到：当$0<|x-a|<\delta$时，有

$$f(a, b)\geqslant f(x, b)$$
$$(\text{或} f(a, b)\leqslant f(x, b)),$$

同样令$x=a$，这样就得到：当$0<|y-b|<\delta$时，有

$$f(a, b)\geqslant f(a, y)$$
$$(\text{或} f(a, b)\leqslant f(a, y)),$$

这表明若二元函数$f(x, y)$在(a, b)点达到极大（小）值，则一元函数$f(x, b)$在$x=a$点也达到极大（小）值，同样，一元函数$f(a, y)$在$y=b$点也达到极大（小）值．

从几何上来看，若$f(a, b)$是曲面$f(x, y)$的一个局部最高点，那么它当然也是曲面上的曲线$f(x, b)$与$f(a, y)$的局部最高点．如颐和园中的佛香阁是万寿山的一个局部最高点，所以你想上佛香阁玩，就得往上爬，无论你取东西方向或南北方向的山路，佛香阁总是一个最高点，你都得往上爬．

在上面极值的定义中，函数可以在(a, b)点没有偏导数，甚至不连续．但一般来说，实际问题中不会有这种情况，所以我们不予讨论．下面假定函数$f(x, y)$在(a, b)点两个偏导数存在．上面已推过二元函数$f(x, y)$若在(a, b)达到极大（小）值，则两个一元函数$f(x, b)$与$f(a, y)$分别在$x=a$和

$y=b$ 处也达到极大(小)值，由一元函数的极值必要条件，即得：

$$\begin{cases} f'_x(a, b)=0, \\ f'_y(a, b)=0. \end{cases}$$

于是有下面定理。

定理 5 设 $f(x, y)$ 在 (a, b) 达到极大(小)值，且在该点两个偏导数存在，则有

$$\begin{cases} f'_x(a, b)=0, \\ f'_y(a, b)=0. \end{cases}$$

定理表明若 (a, b) 是 $f(x, y)$ 的极值点，则它一定是上述函数方程组的解。反之，不一定成立。如函数 $z=xy$，它的偏导数组成的方程组

$$\begin{cases} z'_x=y=0, \\ z'_y=x=0, \end{cases}$$

有唯一解 $(0, 0)$，但由第一节例 9 知 $(0, 0)$ 点不是该函数的极值点。

虽然我们只给出极值的必要条件，其意义还是很大的。方程组的解可能是极值点，也可能不是极值点。但极值点一定在方程组解里边，这就使求极值的范围一下子缩小很多，从原来在闭区域 D 内部找极值点，变为只要在方程组的解中求极值点。如果从问题的实际意义可以判断函数在闭区域 D 内部达到最大(小)值，则内部的最大(小)值也就是极大(小)值，如果方程组在 D 内部只有一组解，则方程组的解一定使所求函数达到最大(小)值。比如你所住的院子内仅你家订阅一份人民日报，而信箱里只有一份报纸，那末你就可以把它拿走，不必担心会不会拿错了。

【例 7】 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内接长方体中，求体积为最大的那个长方体.

解：若长方体是椭球面的内接长方体，可以证明它的面一定要平行于坐标面，且长方体的八个顶点对称地分布在八个卦限（图 1 20）. 设内接长方体在第一卦限的顶点为 (x, y, z)，因顶点在椭球面上，我们有

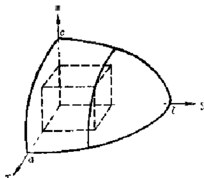


图 1 20

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

所以长方体的体积为：

$$V(x, y)=8xyz$$

$$=8cxy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

我们的问题即求函数 $V(x, y)$ 在闭区域 D：$0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant b$ 中的最大值.

求偏导数可得方程组

$$\begin{cases} V'_x=8cy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+8cxy\dfrac{\left(-\frac{x}{a^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0, \\ V'_y=8cx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}+8cxy\dfrac{\left(-\frac{y}{b^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=0. \end{cases}$$

化简得
$$\begin{cases} 1=\frac{2x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \\ 1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}, \end{cases}$$

由此解出 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, 再由椭球面方程得 $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

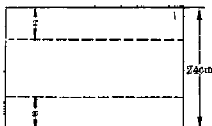
根据题意知椭球面内有最大的内接长方体存在，即函数 $V(x, y)$ 在开区域 D 内部达到最大值，而方程组在 D 内部只有一组解 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, 因此这组解使 V 达到最大值，所求最大内接长方体的体积为

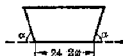
$$V=8\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$$

有时我们会遇到比这个问题复杂得多的情形. 如已知函数在闭区域 D 内部有最大(小)值，而方程组有几组解，这时需要比较函数在这几组解上的值，最大的那个就是最大值. 如果不能判断函数在闭区域 D 内部还是边界上达到最大(小)值，这时除去求出 D 内部极值点外，还要把 $f(x, y)$ 看成边界上的一元函数时，求这个一元函数的最大(小)值，然后与 D 内部极值点比较，定出二元函数的最大(小)值.

习 题 九

1. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆，当其尺寸怎样时，有最小的表面积?
2. 在直圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=h$ $(h>0)$ 的一段中，怎样去嵌入有最大体积的平行六面体?
3. 在椭圆抛物面 $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c(c>0)$ 的一段中，怎样去嵌入有最大体积的平行六面体?
4. 在半径为 R 的圆内求一内接三角形，使其面积最大.
5. 在半径为 R 的圆内求一内接 n 角形，使其面积最大.
6. 有一块铁片，宽 $b=24\,\text{cm}$, 要把它的两边折去做成一槽，使它的容积最大，求每边的倾斜角 α 和 x (如下图).





7．求 a、b 使积分

$$I=\int_0^1 (a+bx-x^2)^2\,dx$$

的值最小.

8．求 a、b、c 使积分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a-b\sin x-c\cos x)^2dx.$$

的值最小.

第四节　全　微　分

4.1　全微分的概念

上节我们利用偏导数，解决了求函数的最大(小)值问题．这节我们要讨论曲面在一点的切平面问题．并给出曲面有切平面的条件，和求切平面的方法．

给定曲面 S：

$$z=f(x,\ y),$$

及定义域上一点 $P_0(x_0,\ y_0)$，令

$$z_0=f(x_0,\ y_0),$$

则 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为曲面 S 上一点，我们的问题是求曲面 S 在 M 点的切平面．首先要注意不是连续曲面在每一点都有切平面，如圆锥面的顶点就没有切平面．所以如果曲面 S 在 M 点有切平面，则对函数 $z=f(x,\ y)$ 在 P_0 点的性质有更多的要

求，我们借助于几何直观导出这一性质。

由解析几何知道，过 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点，且以向量 (a, b, c) 为法向量的平面方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

若平面不平行于 z 轴，则平面的法向量不与 z 方向正交，这时 $c\neq 0$，我们可以把平面方程改写成

$$z-z_0=-\frac{a}{c}(x-x_0)-\frac{b}{c}(y-y_0).$$

用 A，B 分别表示 $-a/c$，$-b/c$，所以过 M 点且不与 z 轴平行的平面方程为

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

如果曲面 S 在 M 点具有不平行于 z 轴的切平面 π：

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0),$$

那末切平面 π 在 M 点附近应紧紧地贴在曲面 S 上，当动点 $P(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的充分小邻域内时，曲面 S 与平面 π 两者几乎很难区分。正如考察地球上一小块地面时，几乎很难区分它是球面的一部分还是平面的一部分一样。

考虑以 P_0 为心，以充分小正数 ρ 为半径的邻域，在该邻域上观看时，曲面与切平面差别很小，为了观看得更清楚，我们把邻域放大成单位圆，放大后两者相差也应很小。邻域半径 ρ 越小，放大成单位圆后两者相差也越小。详细地说，我们作空间坐标变换

$$X=\frac{x-x_0}{\rho},\ Y=\frac{y-y_0}{\rho},\ Z=\frac{z-z_0}{\rho}.$$

这个变换把 (x_0, y_0, z_0) 变到坐标原点，而且把每个坐标轴单位放大成 $\dfrac{1}{\rho}$ 倍，这时曲面 $z=f(x, y)$ 变为：

$$Z=\frac{f(x_0+\rho X, y_0+\rho Y)-z_0}{\rho},$$

切平面变为

$$Z=AX+BY.$$

在单位圆上两者相差很小，记两者的误差为 $\alpha_\rho(X, Y)$ 则

$$\frac{f(x_0+\rho X, y_0+\rho Y)-z_0}{\rho}=AX+BY+\alpha_\rho(X, Y).$$

当 $\rho\to 0$ 时，$\alpha_\rho(X, Y)$ 在单位圆上应趋于 0. 特别 $\alpha_\rho(X, Y)$ 在单位圆周上趋于 0.

下面令 (X, Y) 在单位圆周上，这时点 (x, y) 在以 (x_0, y_0) 为心，ρ 为半径的圆上，变回到原变量就有

$$f(x, y)-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$
$$+\alpha_\rho\left(\frac{x-x_0}{\rho}, \frac{y-y_0}{\rho}\right)\cdot\rho.$$

当 $\rho\to 0$ 时，有 $\alpha_\rho\left(\frac{x-x_0}{\rho}, \frac{y-y_0}{\rho}\right)\to 0$，所以最后一项是比 ρ 高阶的无穷小量，我们记作 $o(\rho)$（因为对这一项我们关心的不是它的具体数值，而是趋于 0 的快慢）. 记号 $o(\rho)$ 表示这个量除以 ρ 后，当 $\rho\to 0$ 时仍趋于 0. 最后我们得到：

$$f(x, y)-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho).$$

总括起来说：若曲面 S 在 M 点切平面存在，则函数在 P_0 点的改变量可以分解成两部分，后一部分是 ρ 的高阶无穷小，函数改变量的值主要决定于前一部分. 前一部分中的 A, B 只与 x_0, y_0 有关，而与 x, y 无关，所以它是 x, y 的线性函数，因此我们称前一部分为函数改变量的主要线性部分. 反之若函数在 P_0 点的改变量可以分解成主要线性部分加上 ρ 的高阶无穷小项：

$$\Delta z=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho),$$

则曲面 S 在 M 点的切平面存在，其方程为：

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

【例1】 求曲面

$$f(x,\ y)=\begin{cases} x+y+(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在原点的切平面.

解：这个函数在全平面上连续. 考虑函数在原点的改变量

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x,\ y)-f(0,\ 0)\\&=x+y+(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\\&=x+y+\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\\&=x+y+\alpha(x,\ y)\cdot\rho\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 显然当 $\rho\to 0$ 时有

$$\alpha\to 0,$$

即把函数在原点的改变量分解成主要线性部分 $x+y$ 与高阶无穷小项 $\alpha\cdot\rho$，所以曲面在原点的切平面存在，切平面的方程为：

$$z=x+y.$$

刚才讨论曲面的切平面所得到的函数性质，将来讨论其它问题时也会遇到，我们把它写成定义形式.

定义 设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点的增量.

$$\Delta z=f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)$$

可以写成 $$\Delta z=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho),$$

或 $$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

这里 A、B 只与 x_0、y_0 有关，而与 x、y 无关，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$．则称函数在 (x_0, y_0) 点可微，并称增量的主要线性部分为函数在该点的微分，记作

$$dz=A\Delta x+B\Delta y,$$

或 $$df(x_0, y_0)=A\Delta x+B\Delta y.$$

关于这个定义我们要说明两点：第一，曲面 S 在 M 点有无切平面问题，归结为函数在 P_0 点是否可微，若可微，则可写出它的切平面方程为

$$z-f(x_0, y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0).$$

比较切平面方程与微分式，知函数在 P_0 点的微分 dz 就是切平面在 z_0 点的增量．第二，若函数在 P_0 点可微，则由

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

可以看出，当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，有 $\Delta z\to 0$，即函数在 P_0 点连续，反之，函数在 P_0 点连续，不一定在 P_0 点可微．

4.2 微分与偏导数

上段我们把曲面是否有切平面和怎样求切平面问题，归结为函数是否可微和求微分问题．利用函数的偏导数，可以满意地解决这两个问题．

定理 6 设函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微，则函数在该点的两个偏导数存在，且

$$A=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad B=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

【证明】 由函数可微的条件，我们有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

或写成

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)\\&=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\end{aligned}$$

其中当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，有 $\alpha(\Delta x,\ \Delta y)\to 0$.

上式对动点 $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 不管沿什么方式趋于定点 $(x_0,\ y_0)$ 都是成立的. 为了证到所要的结果，只要限制动点沿水平方向和垂直方向趋于定点便成，即令 $\Delta y=0$，得

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x,\ 0)|\Delta x|,$$

除以 Δx，得

$$\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}=A+\alpha(\Delta x,\ 0)\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

这时 $\rho=|\Delta x|\to 0$ 等价于 $\Delta x\to 0$. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha(\Delta x,\ 0)$ 是无穷小量，$|\Delta x|/\Delta x$ 是绝对值为 1 的有界变量，因此当 $\Delta x\to 0$ 时，上式右端趋于常数 A，因此上式右端也趋于常数 A，由偏导数定义，即得：

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}=A.$$

同理可证：

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}=B. \ \rbrack$$

根据这一定理，如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点可微，则曲面在 $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ 点的切平面方程为

$$z-f(x_0,\ y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0),$$

其中偏导数在 $(x_0,\ y_0)$ 点取值. 但怎么判断函数在 $(x_0,\ y_0)$ 点的可微性呢？定理 6 只说明若函数可微，则两个偏导数存在. 反之，若两个偏导数在 $(x_0,\ y_0)$ 点存在，是否函数在该点可微呢？由上节例 6 知，若仅有函数在一点的两个偏导数存在，函数可以在该点不连续，当然更谈不上可微. 如果对偏导数再加些条件，就可保证函数可微. 下面有：

定理 7 设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 的偏导数 $f'_x(x,\ y)$，

$f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点及其一个邻域中存在，且此二函数在该点都连续，则函数在该点可微。

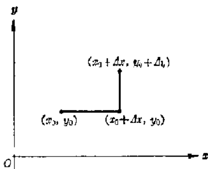


图 1-21

【证明】 证明的方法是：利用偏导数在该点的连续性，把函数在该点的增量拆成主要线性部分加高阶无穷小量。

考虑函数的增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

为了应用偏导数的条件，上式加减函数在 $(x_0+\Delta x, y_0)$ 点的值（图 1-21），得

$$\Delta z = [f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)]$$

上式每个方括号可以看成一元函数在两点函数值之差，应用一元微分中值定理，有

$$\Delta z = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x + f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$。

式中 Δx, Δy 前的系数依赖于 Δx, Δy，即依赖于 x, y，与微分定义中 A, B 的要求不符。为此再把它改写一下：

$$\begin{aligned}\Delta z = &f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &+ [f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0) - f'_x(x_0, y_0)]\Delta x \\ &+ [f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0, y_0)]\Delta y\end{aligned}$$

前两项已符合微分定义的要求。只要证明后两项是

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

的高阶无穷小量，即要证明它们除以 ρ 后，再当 $\rho \to 0$ 时的极限为 0 即可。记后两项除以 ρ 后为 α，则

$$\alpha = [f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0)]\frac{\Delta x}{\rho}$$

$$+ [f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,\ y_0)]\frac{\Delta y}{\rho}.$$

注意到

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant 1,\quad \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| = \left|\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \leqslant 1,$$

及偏导数在$(x_0,\ y_0)$连续，即有$\rho\to 0$时，

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0) - f'_x(x_0,\ y_0)\to 0,$$

$$f'_y(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,\ y_0)\to 0.$$

因此当$\rho\to 0$时，有$\alpha\to 0$. 根据可微定义知函数在$(x_0,\ y_0)$点可微. ▌

上面两个定理把判断函数在一点是否可微和求微分问题，归结为求偏导数和验证偏导数是否连续的问题. 而这两件事是容易做到的，因此微分问题也就有了满意的解决.

我们考虑特殊的函数$z=x$，它有连续的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

由定理7知函数可微，且

$$dz = dx = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x,$$

即把x看成函数时，它的微分等于Δx. 前面我们没有定义自变量x的微分，为了使上式对x是自变量时也有意义，我们规定自变量x的微分就等于它的改变量.

$$dx=\Delta x,$$

同样规定自变量y的微分为：

$$dy=\Delta y.$$

这样，二元函数微分就可写成

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

【例 2】 求函数 $z=x^2+4xy^2+y^3$ 的全微分.

解：因偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+4y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=8xy+3y^2.$$

在全平面连续，由定理 7 知函数在全平面可微，且

$$dz=(2x+4y^2)dx+(8xy+3y^2)dy.$$

【例 3】 求 $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ 的全微分.

解：函数 θ 表示点 (x, y) 的极角，所以函数定义域为：$0<x^2+y^2<+\infty$，在定义域上 θ 是多值函数，为了取出单值连续函数，我们考虑全平面除去正实轴的区域，在该区域上有

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

因偏导数在该区域上连续，所以函数在该区域上可微，且

$$d\theta=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

【例 4】 求 $z=x^2+\frac{y^2}{2}$ 在(2, 2, 6)点的切平面.

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=y.$$

偏导数在(2, 2)点连续，知函数在(2, 2)点可微，因而曲面在(2, 2, 6)点切平面存在. 又由

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,2)}=2x\Big|_{(2,2)}=4,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,2)}=y\Big|_{(2,2)}=2,$$

所以切平面方程为：

$$z-6=4(x-2)+2(y-2),$$

化简得：　$$4x+2y-z-6=0.$$

习 题 十

1．求下列曲面在给定点的切平面：

　1）$z=x^2+y^2$, $M(1, 2, 5)$；

　2）$z=x^3+y^3-2x^2y-2xy^2$, $M(1, 1, -2)$；

2．确定常数 a, 使平面 $z=x+y+a$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面.

3．证明 曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

4．试叙述三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微的定义，并讨论可微与偏导数的关系.

5．求下列函数的微分：

　1）$u=x^my^n$；　　2）$u=\dfrac{x}{y}$；

　3）$u=\sqrt{x^2+y^2}$；　　4）$u=e^{xy}$；

　5）$u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$；　　6）$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$.

6．证明函数

$$f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在(0, 0)点可微，但偏导数在(0, 0)点附近无界.

7．设 $f(x, y)$ 在区域 D 上偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0,$$

证明 $f(x, y)$ 在 D 上为一常数.

[提示. 采用定理7的证明方法.]

8．设 $f(x, y)$ 在区域 D 上偏导数有界，证明：$f(x, y)$ 在 D 上连续.

4.3 微分的应用

函数在一点可微，就表示在一点附近可用线性函数来逼近一般的函数，也就是说在一点附近，可以把一般函数当作线性函数处理且不会引起太大的误差，从而使问题得以大大化简。

设函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 点可微，则当 Δx, Δy 很小时，可以用 dz 近似代替 Δz：

$$\Delta z \approx dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

利用这个公式我们可以作误差估计．如要制造一个高为 H，底半径为 R 的圆柱体，制成后测得高度误差为 ΔH，底半径误差为 ΔR（具体测量时只能测直径），由于高和底半径的误差，引起圆柱体体积 V 与原设计要求有一误差．问体积的误差是多大，这时我们不必精确地去计算体积误差 ΔV，我们可以认为体积误差就是 dV．也常利用这个公式作近似计算．如有一高为 H，底半径为 R 的圆柱体，在圆柱体的表面需要镀一层镍，厚度为 h，问需要多少镍．这问题相当于求圆柱体高 H 增加 $2h$，底半径 R 增加 h 时，体积 V 增加多少？同样，可以用 dV 代替 ΔV，从而估计出镍的用量．

在上面公式中，Δz 用 $f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ 代入，可得：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

这个公式可用来求函数值的近似值．比如要求函数在 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 点的值，如果函数在 (x, y) 点的值和偏导数值很容易求出，则可用上式右端作为所求函数值的近似值．

【例 5】 计算 $(1.03)^{1.98}$ 的近似值．

解：在具体问题中，并没有给出函数 $f(x, y)$，点 (x, y)

及改变量 Δx, Δy, 需要我们根据问题的特点，自己看出函数 $f(x, y)$ 是什么，点 (x, y) 及改变量 Δx, Δy 是什么. 对这个问题来说，函数 $f(x, y)=x^y$，点 (x, y) 与 Δx, Δy 应为 $(1, 2)$ 及 $\Delta x=0.03$, $\Delta y=-0.02$.

把它们代入公式:

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y,$$

得 $$(1.03)^{1.98} \approx 1^2 + 2\times 0.03 + 0\times(-0.02) = 1.08.$$

【例 6】 求玻璃钢瓶的体积变化.

解: 玻璃钢瓶先是用玻璃纤维沿经向和纬向缠绕成型(图 1-22)，然后经加工处理后变为质地如钢的玻璃钢瓶. 我们知道一纤维在压力作用下（设瓶内充以高压氧气）, 会使纤维伸长，若纤维原长度为 l, 在压力作用下伸长 Δl, 则称 $\Delta l/l$ 为纤维的应变, 习惯用符号 ε 表示应变. 有一很小的一种仪器，只要往瓶上一贴，即可测出纤维的应变. 设测出经向纤维的应变为 $\varepsilon_\theta=\dfrac{\Delta H}{H}$，纬向纤维

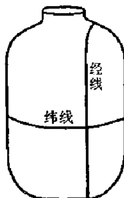


图 1-22

的应变 $\varepsilon_\varphi=\dfrac{2\pi\Delta R}{2\pi R}=\dfrac{\Delta R}{R}$，问瓶子体积的应变是多少. 当体积应变超过规定标准时, 瓶子就不能继续使用, 所以必须有简单的方法求出体积的变化.

实际问题往往是合理的近似就行，不必要也不可能要求绝对的准确. 我们可以把玻璃钢瓶近似看成高为 H，底半径为 R 的圆柱体. 它的体积为

$$V=\pi R^2 H$$

由经线、纬线的应变, 使体积有一增量 ΔV,

$$\Delta V \approx dV = 2\pi RH\Delta R + \pi R^2\Delta H,$$

所以体积应变为

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{2\pi RH\Delta R}{\pi R^2 H} + \frac{\pi R^2\Delta H}{\pi R^2 H}$$

$$= 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = 2\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta.$$

这说明体积应变等于两倍纬线的应变加上经线的应变，只要考察这个值是否超过规定标准，即可决定瓶子能否继续使用.

习 题 十 一

1. 当测定圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下：

$$R=2.5\text{ 米}\pm 0.1\text{ 米},\ H=4.0\text{ 米}\pm 0.2\text{ 米}.$$

问所算出的圆柱体积可有怎样的绝对误差(即 ΔV)？

2. 三角形的边 $a=200$ 米 ± 2 米，$b=300$ 米 ± 5 米，它们之间的角 $C=60°\pm 1°$，问所算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差.

3. 有一半径 $R=5$ 厘米，高 $H=20$ 厘米的金属圆柱体100个，现要在圆柱体表面镀一层厚度为0.05厘米的镍，估计需要多少镍(镍比重为8.8).

4. 近似地求下列各值

1) $1.002\times 2.003^2\times 3.004^3$;　　2) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$;

3) $\sin 29°\cdot \mathrm{tg}\, 46°$;　　4) $0.97^{1.05}$.

第五节　复合函数微分法

5.1 简单情形

求函数的偏导数和微分统称为多元函数微分法. 上两节我们讨论了显函数的微分法，这节我们要讨论复合函数的微分法，它可以看成是上两节在函数关系方面的推广.

设 $z=f(x, y)$，而 x, y 又是 t 的函数：

$$x=x(t),\ y=y(t).$$

复合后得 $$z=f(x(t),\ y(t)),$$

它是 t 的一元函数，怎么求 $\frac{dz}{dt}$ 呢？如果 $f(x,\ y)$ 是具体给出的函数，那末总可以归结为一个具体的一元函数求导问题. 但对一般形式的二元函数，这里有两个中间变量 x、y，而一元复合函数求导公式中只允许有一个中间变量，所以不能归结为一元求导问题，这就需要建立二元复合函数的求导公式.

定理 8 设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点可微，又 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 在 t_0 点可导，且把 t_0 点变为 $(x_0,\ y_0)$ 点，那末复合函数也在 t_0 点可导，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

【证明】 当 t 有增量 Δt 时，函数 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 分别有增量 Δx、Δy，而 Δx、Δy 又引起 z 有增量 Δz，我们的问题就是要证明当 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta z/\Delta t$ 有上面公式中的极限.

由二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 点可微，就有

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x,\ \Delta y)\cdot\rho, \tag{5.1}$$

其中当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时，有 $\alpha\to 0$. 上面微分定义中是把 x, y 看成自变量的，这时 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$，当 x, y 看成中间变量时，由 $\Delta t\neq 0$ 不一定有 $\Delta x^2+\Delta y^2\neq 0$，所以我们补充规定当 $\Delta x^2+\Delta y^2=0$ 时，$\alpha(\Delta x,\ \Delta y)=0$.

在这一规定下(5.1)式照样成立，而且 $\rho\to 0$(可以等于 0)时仍有 $\alpha\to 0$. 然后上式两边除以 $\Delta t\neq 0$，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\frac{|\Delta t|}{\Delta t}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}, \tag{5.2}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，由条件（因可微必连续）可得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt},\quad \frac{\Delta y}{\Delta t}\to\frac{dy}{dt},$$
$$\Delta x\to 0,\quad \Delta y\to 0.$$

由后两式得 $\rho\to 0$，也就有 $\alpha\to 0$. 所以在(5.2)中令 $\Delta t\to 0$ 时，等式右端第三项是无穷小量乘以有界变量，所以仍为无穷小量，因此等式右端极限存在，所以等式左端极限也存在，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$ ▌

注意，上述定理中的导数和偏导数都是分别在 t_0 和 (x_0, y_0) 点取值，所以在 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 中的 x, y 要分别用 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 代入，这种代入可在求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 后就进行，也可以进行总的运算而得到 $\frac{dz}{dt}$ 的表达式（其中包含 x 和 y）后再进行.

对上面的公式不难推广到三元函数的情形.

【例 1】 设 $z=x^2-y^2$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解：因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=2\sin t,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=-2\cos t,$$
$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=-\sin t.$$

所以

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$=2\sin t\cdot\cos t+(-2\cos t)\cdot(-\sin t)=2\sin 2t.$$

【例 2】 设 $z=\frac{y}{x}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

解：题中 z 是因变量，x, y 是中间变量，x 又是自变量．因

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x},$$

$$\frac{dx}{dx}=1,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

所以 $$\frac{dz}{dx}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}-\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

【例 3】 设 $z=f(x, y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=f(x, y). \tag{5.3}$$

今要证明：一元函数 $z=f(e^t, e^{-t})=z(t)$ 满足方程

$$\frac{dz}{dt}=z(t).$$

【证明】 函数 $z=z(t)=f(e^t, e^{-t})$ 可以看成二元函数 $z=f(x, y)$，和 $x=e^t$, $y=e^{-t}$ 的复合．因此

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}e^t-\frac{\partial f}{\partial y}e^{-t}. \tag{5.4}$$

注意条件 (5.3) 表示对所有 x, y 为恒等式，特别令 $x=e^t$, $y=e^{-t}$ 代入后得关于 t 的恒等式，即

$$e^t\frac{\partial f(e^t, e^{-t})}{\partial x}-e^{-t}\frac{\partial f(e^t, e^{-t})}{\partial y}=f(e^t, e^{-t})=z(t),$$

由(5.4)即得

$$\frac{dz}{dt}=z(t).$$

习题十二

1．求下列函数的 $\frac{du}{dt}$：

1) $u=\frac{x+2y}{2x-y}$, $x=e^t$, $y=e^{-t}$;

2) $u=e^x(y-z)$, $x=t$, $y=\sin t$, $z=\cos t$.

2. 若函数 $f(x, y, z)$ 对任意正实数 t 满足关系式

$$f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z),$$

则称 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数. 证明, 设 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数,则有

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf.$$

3. 对下列函数验证上题成立.

1) $u=(x-2y+3z)^2$; 2) $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

3) $u=\dfrac{x-y}{x+y}\ln\dfrac{y}{x}$; 4) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

4. 设函数 $u=f(x, y, z)$ 满足方程

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=0,$$

试证 $u=f(x, y, z)$ 是零次齐次函数.

[提示:固定 x, y, z, 考虑一元函数 $F(t)=f(tx, ty, tz)$.]

5.2 一般情形

设 $z=f(x, y)$, 又 $x=x(s, t)$, $y=y(s, t)$, 复合后得 s、t 的二元函数,

$$z=f(x(s, t), y(s, t)).$$

这里 z 是因变量, x、y 是中间变量, s、t 是自变量. 怎样求 $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ 呢?

对 s 求偏导数时,把变量 t 看成常数,实质上就化为上面已经讨论过的简单情形,只需将记号作相应的改变即成,所以有公式

同理,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\\ \frac{\partial z}{\partial t}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

应用公式时，不必死套公式，只要记住它的锁链规则．这规则说函数对自变量求偏导数，等于函数对第一个中间变量求偏导数，乘以第一个中间变量对该自变量求偏导数．再加上函数对第二个中间变量求偏导数，乘以第二个中间变量对该自变量求偏导数．一般来说，函数有几个中间变量，复合求导的公式就有几项，函数有几次复合，每项就有几个因子相乘．

【例 4】 $z=e^u\sin v$, $u=x+y$, $v=x-y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：题中因变量是 z，中间变量是 u, v，自变量是 x, y，由公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot 1$$

$$=e^{x+y}[\sin(x-y)+\cos(x-y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot(-1)$$

$$=e^{x+y}[\sin(x-y)-\cos(x-y)].$$

【例 5】 $z=f\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$．由复合函数求导公式有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{y}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2,$$

其中记号 f'_1 表示函数对第一个中间变量求偏导数，f'_2 表示对第二个中间变量求偏导数．因函数 f 的具体表示式未曾给出，所以结果只能写到这里．但要注意其中的 u, v 还要分别用 xy 和 $\frac{x}{y}$ 代入．再有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

【例 6】 $u=f(x, xy, xyz)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3'$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=f_1'\cdot 0+f_2'\cdot 0+f_3'\cdot xy=xyf_3'$.

题中 f_1' 有时也可写成 $\frac{\partial u}{\partial x}$，这时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 中是把 x 看成中间变量且在后两个中间变量固定时对 x 求出来的偏导数；而第一式左端的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 中的 x 是自变量，理解成复合后求出来的偏导数.

【例 7】 作自变量变换：$u=x$，$v=x^2-y^2$ 后，求方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

的解.

解：在上述变换的反变换作用下，把函数 $z=z(x, y)$ 变为 $Z=Z(u, v)$，反之在上述变换作用下，把 $Z=Z(u, v)$ 又变回到函数 $z=z(x, y)$，这里把原自变量 x，y 看成自变量，把新自变量 u，v 看成中间变量，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial Z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial Z}{\partial v}\cdot 2x=\frac{\partial Z}{\partial u}+2x\frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial Z}{\partial v},$$

代入原方程得

$$y\left(\frac{\partial Z}{\partial u}+2x\frac{\partial Z}{\partial v}\right)+x\cdot\left(-2y\frac{\partial Z}{\partial v}\right)=0,$$

化简得
$$\frac{\partial Z}{\partial u}=0.$$

这个方程的解显然为

$$Z=f(v),$$

其中 f 是任意一个一元可微函数. 所以原方程的解为

$$z=f(x^2-y^2).$$

【例 8】 设二元函数 $F(x, y)$ 在直角坐标系里可写成 $F(x, y)=f(x)g(y)$, 又在极坐标系里可写成 $F(x,y)=S(r)$, 试求出此二元函数.

解: 已知直角坐标系与极坐标系的变换为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

把 x, y 看成中间变量, 把 r, θ 看成自变量, 由条件, $F(x, y)$ 不依赖于 θ, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\\&=f'(x)g(y)\cdot(-r\sin\theta)+f(x)g'(y)\cdot(r\cos\theta)\equiv0,\end{aligned}$$

或
$$yf'(x)g(y)-xf(x)g'(y)\equiv0,$$

即有
$$\frac{f'(x)}{xf(x)}\equiv\frac{g'(y)}{yg(y)}.$$

上式左端只是自变量 x 的函数, 不出现 y. 右端只是自变量 y 的函数, 不出现 x. 要恒等式成立, 这个量既不出现 x 又不出现 y, 它必然为一常数, 记作 λ, 所以

$$\begin{cases} \dfrac{f'(x)}{xf(x)} = \lambda, \\ \dfrac{g'(y)}{yg(y)} = \lambda. \end{cases}$$

先看第一个式子，并把它改写成

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \lambda x\,dx$$

或
$$d\ln f(x) = d\left(\frac{\lambda}{2}x^2\right),$$

即得
$$\ln f(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + \ln C_1,$$

这里 $\ln C_1$ 表示任意常数，所以

$$f(x) = C_1 e^{\frac{\lambda}{2}x^2}.$$

同理
$$g(y) = C_2 e^{\frac{\lambda}{2}y^2},$$

最终解得
$$F(x, y) = Ce^{\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)},$$

其中 $C = C_1 \cdot C_2$ 仍为任意常数.

习 题 十 三

1. 求下列各题的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

   1) $z = \dfrac{\cos u}{v}$, $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 - y^2$;

   2) $z = \operatorname{arctg}(u+v)$, $u = 2x - y^2$, $v = x^2 y$;

   3) $z = e^{u\sin v}$, $u = xy$, $v = \ln(x+y)$;

   4) $z = u \cdot v$, $x = u + v$, $y = 3u + 2v$.

2. 求下列函数对自变量 x, y, z 的一阶偏导数:

   1) $u = f(ax, by)$; 2) $u = f(x+y, xy)$;

   3) $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$; 4) $u = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$;

   5) $u = f(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy)$; 6) $u = f(x^2+y^2+z^2)$.

3. 设 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 试由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, 证明等式 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

4. 作自变量替换: $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$, 求方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的解.

5. 作自变量替换: $u=x$, $v=xy$, 求方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

的解.

6. 设二元函数 $F(x,y)$ 在直角坐标系里可写成 $F(x,y)=f(x)+g(y)$, 在极坐标系里可写成 $F(r, y)=S(r)$, 试求出二元函数 $F(x, y)$.

7. 设二元函数 $F(x, y)$ 在直角坐标系里可写成 $F(x,y)=f(x)\cdot g(y)$, 在极坐标系里可写成 $F(x, v)=\varphi(\theta)$, 试求出二元函数 $F(x, y)$.

8. 若函数 $z=f(x, y)$ 满足方程

$$xz'_x+yz'_y=0,$$

证明 $f(x, y)$ 在极坐标系里只是 θ 的函数.

9. 若函数 $z=f(x, y)$ 满足方程

$$\frac{z'_x}{x}=\frac{z'_y}{y},$$

证明 $f(x, y)$ 在极坐标系里只是 r 的函数.

5.3 一阶微分形式的不变性

给定二元函数

$$z=f(x, y),$$

当 x, y 为自变量时, 函数的微分式为

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{5.6}$$

若 x, y 是 s, t 的函数

$$\begin{cases} x=x(s, t), \\ y=y(s, t), \end{cases}$$

时，复合后得 s, t 的二元函数

$$z=f(x(s,t),\ y(s,t)).$$

它的微分应是

$$dz=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt. \tag{5.7}$$

由(5.5)知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}.\end{cases}$$

把它代入(5.7)，并合并同类项得

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right).$$

上式圆括弧中的量不是别的，正是函数 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$ 的微分，因此有

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{5.8}$$

比较(5.6)与(5.8)，我们可以看出，不管 x, y 是自变量还是中间变量，它们的微分形式是一样的，这个性质叫做一阶微分形式的不变性．利用微分的这一性质，我们可以得出多个自变量时的微分四则运算法则．当 u, v 是自变量时，我们有

$$d(u\pm v)=du\pm dv,$$

$$d(u\cdot v)=v\,du+u\,dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

由一阶微分形式的不变性，当 u, v 是 x, y 的函数时，上式仍成立．此外当 f 仅是 x 的函数时，注意从(5.8)式可得

$$d(f(x(s,t)))=f'_x(x(s,t))dx.$$

这样连同微分的四则运算法则，我们可以通过微分来求偏导数．

【例 9】 设 $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：

$$dz=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

由定理 6 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

【例 10】 设 $z=e^{xy}\sin(x+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：

$$\begin{aligned}dz&=d(e^{xy}\sin(x+y))\\&=\sin(x+y)d(e^{xy})+e^{xy}d(\sin(x+y))\\&=\sin(x+y)e^{xy}d(xy)+e^{xy}\cos(x+y)d(x+y)\\&=e^{xy}\sin(x+y)(y\,dx+x\,dy)+e^{xy}\cos(x+y)(dx+dy)\\&=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx\\&\quad+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy.\end{aligned}$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

【例 11】 设 $u=f(xy,\ yz,\ zx)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解：

$$\begin{aligned}du&=f_1'd(xy)+f_2'd(yz)+f_3'd(zx)\\&=f_1'(y\,dx+x\,dy)+f_2'(z\,dy+y\,dz)+f_3'(x\,dz+z\,dx)\\&=(yf_1'+zf_3')dx+(xf_1'+zf_2')dy+(yf_2'+xf_3')dz.\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf_1'+zf_3'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xf_1'+zf_2'$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=yf_2'+xf_3'$.

5.4 变换行列式

在一元函数里，我们讲过反函数的求导公式，若给定函数 $y=y(x)$，若它的导数连续且不为零，则反函数 $x=x(y)$ 存在且

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

或

$$\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=1.$$

对二元函数我们也有类似的反函数概念和性质．首先我们对公式(5.5)作进一步的推广．公式(5.5)利用矩阵乘法规则，可以写成矩阵的形式，

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s},\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}\tag{5.9}$$

利用这个写法，我们可以把复合函数求导公式推广到多个因变量、多个中间变量和多个自变量情形．比如说有 n 个因变量，m 个中间变量，k 个自变量，先把这些变量排个队，称之为第一个因变量，第二个因变量直至第 n 个因变量等等．那么推广后的公式，左边是 $n\times k$ 矩阵，此 n 行 k 列矩阵，它的元素是因变量对自变量的偏导数，如第 i 行第 j 列元素 $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant k)$ 是第 i 个因变量对第 j 个自变量的偏导数．公式右端的第一个矩阵是 $n\times m$ 矩阵，它的元素是因变量对中间变量的偏导数，如第 i 行第 j 列元素 $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$，是第 i 个因变量对第 j 个中间变量的偏导数；公式右端的第二个矩阵是 $m\times k$ 矩阵，它的元素是中间变量对自变量的偏导数，

如第 i 行第 j 列的元素（$1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant k$），是第 i 个中间变量对第 j 个自变量的偏导数．比如有两个因变量 x, y；三个中间变量 u, v, w，两个自变量 s, t，则求导公式为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} & \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

现在我们引进平面上的反函数的概念．设有函数

$$\begin{cases} x = x(u,\ v), \\ y = y(u,\ v), \end{cases} \tag{5.10}$$

在 uv 平面区域 Δ 上定义．对于 Δ 上的一点 $(u_0,\ v_0)$ 代入上式，得

$$\begin{cases} x_0 = x(u_0,\ v_0), \\ y_0 = y(u_0,\ v_0). \end{cases}$$

这就是说把 uv 平面上一点 (u_0, v_0)，变为 xy 平面一点 (x_0, y_0)．再假设当点 $(u,\ v)$ 跑遍整个区域 Δ 时，相应的点 $(x,\ y)$ 跑遍 xy 平面上的区域 D（图 1 23），则称变换（5.10）把区域 Δ 变为区域 D．

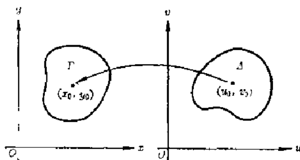


图 1 23

假定变换(5.10)是一一对应，即把 Δ 中一个点变到 D 中一点，把 Δ 中不同的点变到 D 中不同的点．这样逆变换

$$\begin{cases} u=u(x,\ y), \\ v=v(x,\ y), \end{cases} \tag{5.11}$$

存在，逆变换把区域 D 变为区域 Δ．又假定变换(5.10)与其逆变换(5.11)都在各个区域上有连续的偏导数(简称连续可微)．

首先作逆变换(5.11)，再作变换(5.10)，即得到恒等变换，用复合函数的形式来表示，即

$$\begin{cases} x=x(u(x,\ y),\ v(x,\ y)), \\ y=y(u(x,\ y),\ v(x,\ y)), \end{cases}$$

上式中把 x, y 看成因变量，把 u, v 看成中间变量，还把 x, y 看成自变量，应用前面所说的复合函数求导规则，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

对上式取行列式可得

$$1=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}. \tag{5.12}$$

这就是一元函数反函数求导公式的推广．这种 n 个函数对 n 个变量求偏导数组成的行列式，称为雅可比行列式，如上式第一个行列式称 x, y 对 u、v 的雅可比行列式，记作

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} \quad 或 \quad \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}.$$

这种记号指示出那一组函数对那一组变量求导，它是一个函数对一个变量求导记号的推广.

行列式表示一个数，(5.12)式说明两个数相乘等于1，所以这两个数必不为零. 因而一一对应且连续可微变换的雅可比行列式在区域上不为零. 此外，注意雅可比行列式是区域 D 上的二元连续函数，一个连续函数在区域上不为零，必处处大于零或处处小于零，而不可能有些点大于零，有些点小于零. 否则根据连续函数取中间值定理，就会得出在区域上某一点取零值，与假设处处不为零矛盾. 所以一一对应且连续可微变换的雅可比行列式在区域上不变号，且原变换及其逆变换的两个雅可比行列式或同时大于零，或同时小于零.

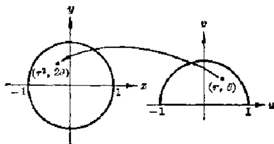


图 1 24

【例 12】 证明变换 $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, 把区域 Δ: $v>0$ 与 $0<u^2+v^2<1$, 变为区域 D: $0<x^2+y^2<1$(图 1 24)，且求

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \quad 及 \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

解：用 (r, θ) 表示 uv 平面上的极坐标，(ρ, φ) 表示 xy 平面上的极坐标，将变换改写成极坐标形式：

$$\begin{cases} x=r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=r^2\cos 2\theta, \\ y=2r^2\cos\theta\sin\theta=r^2\sin 2\theta \end{cases}$$

与
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$
比较后，得到极坐标形式下的变换为
$$\begin{cases} \rho=r^2, \\ \varphi=2\theta. \end{cases}$$
这个变换把 uv 平面上 (r, θ) 点变为 xy 平面上 $(r^2, 2\theta)$ 点，所以当 uv 平面上点沿半径为 r 的圆周转半圈时，它的象点沿半径为 r^2 的圆周正好转了一圈．于是变换把 uv 平面上的区域 Δ: $0<r<1$ 与 $0<\theta<\pi$，变为 xy 平面上区域 D: $0<\rho<1$ 与 $0<\varphi<2\pi$.

当点 (u, v) 在 Δ 上时，
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix}=4(u^2+v^2)>0.$$
由(5.12)知
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\frac{1}{4(u^2+v^2)},$$
再利用 $x^2+y^2=(u^2-v^2)^2+4u^2v^2=(u^2+v^2)^2$，可得 (x, y) 属于 D 时有
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\frac{1}{4\sqrt{x^2+y^2}}>0.$$

若考虑区域 Δ^*: $0<u^2+v^2<1$，如同上面讨论知道变换 $x=u^2-v^2$, $y=2uv$，把 uv 平面上区域 Δ^* 变为 xy 平面上的 D^*: $0<x^2+y^2<1$．当 (u, v) 属于 Δ^* 时，仍有
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=4(u^2+v^2)>0,$$
但变换在 Δ^* 上不一一对应，因为它把 Δ^* 的不同点 (r, θ) 与 $(r, \pi+\theta)$ 变为 D^* 上同一点 $(r^2, 2\theta)=(r^2, 2\pi+2\theta)$，$(0<r<1)$．回忆在一元函数的情形下，若 $y=f(x)$ 在某开区间上导数恒大于零，则 $y=f(x)$ 严格递增，即变换 $y=f(x)$ 一一对

应．而对二元函数来说，由雅可比行列式在区域上大于零，不能保证变换是一一对应的，所以要考察二元函数的变换在区域上是否一一对应，只能具体问题具体分析，不能仅凭雅可比行列式不为零这一事实就作出判断．

习题十四

1．设 $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$, 求 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 及 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

2．设 $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=\frac{v}{u^2+v^2}$, 求 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 及 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

3．设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 求 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$.

4．设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$, 求 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$.

5．设 $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$, 求 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}$.

第六节　隐函数微分法

6.1　隐函数微分

上一节我们把微分法推广到复合函数情形，但它们都是显函数．而在实际问题中，经常遇到的函数关系除显函数外，还有隐函数，即因变量与自变量的对应关系不是通过明确的公式表示出来，而是通过一个方程式来确定的．这一节中我们就要把微分法推广到隐函数的情形．

如给定方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

当(x, y)为平面区域 D: $x^2+y^2\leqslant R^2$ 内一点时，就有一个正值 z 使其满足上述方程，即对于 D 内一点(x, y)，就有一个正值 z 与之对应，根据函数的定义，z 就是变量 x、y 的函数，这个

函数我们称为由上述方程所确定的隐函数．既然它们有函数关系，我们也可以写 $z=z(x, y)$，这样写法仅仅意味着 x、y 与 z 有函数关系，并不意味着知道由 x、y 求 z 的明确表示公式．若理解成明确的表示公式，那么它就不再是隐函数而是显函数了．如由上述方程解出

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

这就不能说它是由上述方程所确定的隐函数，而是将隐函数变为显函数了．

注意，并不是所有由方程确定的隐函数都能解出因变量而成为显函数形式的．如刻卜勒方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0 \quad (0<\varepsilon<1),$$

我们可以证明任意给定 x，由方程总有一个 y 值与其对应，所以它确定一个隐函数 $y=y(x)$，但我们不可能将 y 用 x 的初等函数表示出来．

关于隐函数与显函数，事实上我们并没有给出严格的定义，因为什么叫"明显"、什么叫"公式"等名词，并未给出严格的数学定义，只凭常识的理解．一般来说，由公式给出的函数就叫显函数，由方程所确定的函数称为隐函数，如把显函数 $z=f(x, y)$ 写成 $z-f(x, y)=0$ 的形式，那末也就成为隐函数的形式了．

最后我们要指出，不是所有的方程都能确定隐函数．如方程

$$x^2+y^2+z^2=-1$$

就不确定隐函数；方程

$$x^2+y^2+z^2=0$$

只确定出定义域为一点 (0, 0) 的隐函数，说它不确定一个隐函数可能更恰当些；方程

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

可确定出两个连续的隐函数，把它们写成显函数的形式，即为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \text{和} \quad z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

这样，就提出一个问题：给定一个方程，在什么条件下它确定一个隐函数．这是一个理论性问题，也是多元微分学中颇为复杂的一个问题，在第八节中将只给出定理的叙述．下面我们在假定方程确实定出隐函数的前提下，来讨论隐函数的微分法．

今设方程

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

确定隐函数 $z=z(x,\ y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

因 $z=z(x,\ y)$ 是由方程所确定的隐函数，把它代回方程应得恒等式

$$F(x,\ y,\ z(x,\ y))\equiv 0,$$

利用一阶微分形式的不变性，及恒等式微分后仍为恒等式，我们有

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\equiv 0,$$

设 $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$，解出 dz 得

$$dz=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}dy,$$

所以有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

上面虽然隐函数 $z=z(x, y)$ 没有解出来，但它的偏导数却用已知函数 $F(x, y, z)$ 的偏导数表示出了．当然在偏导数中仍含有变数 z，所以想知道偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 具体值是不可能的，但可以利用它来讨论函数的一些性质．

下面讨论方程组情形．一般来说 n 个方程可以确定 n 个函数，如方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0, \end{cases}$$

确定隐函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$．

由一阶微分形式的不变性，得

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=-\frac{\partial F_1}{\partial x}dx, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=-\frac{\partial F_2}{\partial x}dx, \end{cases}$$

把 dy、dz 看成未知数解上述方程组，假设 dy、dz 的系数所组成的行列式不为零，可解出：

$$dy=\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x}dx & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x}dx & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}}dx,$$

所以求出 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)}\Big/\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}$,

同理, $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, x)}\Big/\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}$.

【例 1】 设 $F(x-y, y-z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x, y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: 求微分后得

$$F'_1 d(x-y)+F'_2 d(y-z)=0,$$

化简得 $F'_1 dx+(F'_2-F'_1)dy-F'_2 dz=0$,

解出 dz(设 $F'_2\neq 0$):

$$dz=\frac{F'_1}{F'_2}dx+\frac{F'_2-F'_1}{F'_2}dy,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F'_1}{F'_2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F'_2-F'_1}{F'_2}$.

【例 2】 设 $x=y+\varepsilon\sin y(0<\varepsilon<1)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解: 对方程求微分得

$$dx=dy+\varepsilon\cos y\,dy,$$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+\varepsilon\cos y}$.

【例 3】 设方程 $F(x, y, z)=0$, 可以把任一变量确定为其余两个变量的隐函数, 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

解: 对方程求微分得

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

由上式可求出(假设三个偏导数皆不为零):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}},$$

所以
$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

这例表明，二元函数的偏导数记号与一元函数的导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 不同，后者可以看成一个分式，而前者不能看成一个分式，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是表示一个整体的记号，否则从上例中就会得到 $1=-1$ 这个荒谬的结果.

【例 4】 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$，取 x、y 作自变数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：由题中前两个方程可以确定 u, v 是 x, y 的隐函数，即

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y). \end{cases}$$

把它们代入最后一个方程得

$$z=z(u(x,y),\ v(x,y)).$$

我们的问题就是要求上面函数对 x、y 的偏导数.

先由复合函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.1}$$

为了求出 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$，利用隐函数求微分法，对题中前两个方程求 x 的偏导数，我们有

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由上面方程组解出$\left(假设\ \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\neq 0\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}.$$

把它们代入(6.1)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}=-\frac{\dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}.$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}}{\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}}.$$

习 题 十 五

1．对下列方程确定的函数 $z=z(x,\ y)$，求它的所有一阶偏导数:

1) $x^n+y^n+z^n=a^n$;　　　2) $x+y+z=e^{x+y+z}$;

3) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$;　　　4) $z^x=y^z$;

5) $xy+yz+zx=1$.

2．对下列方程确定的函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 求它们的导数:

1) $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$;

2) $x^3+y^3+z^3=3xyz,\ x+y+z=a$.

3．求由下列方程所确定的函数 $z=z(x,\ y)$ 的微分:

1) $f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$,

2) $z=f(xz,\ z-y)$;

3) $f(x-y,\ y-z,\ z-x)=0$;

4) $f(x,\ x+y,\ x+y+z)=0$.

4．设 $xu-yv=0,\ yu+xv=1$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

5．设 $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$. 试确定函数 $z=z(x,\ y)$，并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

6．设 $x=\cos\varphi\cos\theta,\ y=\cos\varphi\sin\theta,\ z=\sin\varphi$. 试确定函数 $z=z(x,\ y)$，并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

7．函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所确定，证明

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

8．函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程

$$F\left(x+\frac{z}{y},\ y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所确定，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

9．函数 $u=u(x,\ y,\ z)$ 由方程

$$F(u^2-x^2,\ u^2-y^2,\ u^2-z^2)=0$$

所确定，证明

$$\frac{u'_x}{x}+\frac{u'_y}{y}+\frac{u'_z}{z}=\frac{1}{u}.$$

6.2 曲面的切平面与法向量

在第四节我们讲过，如果函数

$$z=f(x,\ y)$$

在 $(x_0,\ y_0)$ 点可微，则曲面在 $M(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ 点切平面

存在，其方程为

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0),$$

其中偏导数在(x_0, y_0)点取值．由解析几何知道切平面的法向量为

$$N=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right),$$

所以曲面过$M(x_0, y_0, z_0)$点的法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1},$$

其中的偏导数是在(x_0, y_0)点取值．若分母有一为零时，约定相应的分子也为零．

设法向量N与x、y、z轴的夹角分别为α、β、γ，则称$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为法向量N的方向余弦，也就是把法向量N单位化以后所得向量的三个分量：

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

上面三个式子中根式前的正负号，要末同时取"+"号；要末同时取"−"号．如果要求曲面在(x_0, y_0, z_0)点的法向量向上，

这时它与 Z 轴的夹角小于 $90°$，因此法向量的第三个方向余弦必须大于零，即 $\cos\gamma>0$，所以三个根式都取"+"号；如果要求曲面在(x_0, y_0, z_0)点的法向量向下，这时它与 z 轴的夹角大于 $90°$，因此法向量的第三个方向余弦必须小于零，即 $\cos\gamma<0$，所以三个根式前都取"－"号．

若曲面由方程

$$F(x, y, z)=0$$

给定，要求曲面上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$的切平面与法向量．这时我们可以化到显函数情形．设方程所确定的隐函数为

$$z=z(x, y),$$

由上知过 $M(x_0, y_0, z_0)$点的切平面方程为：

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0),$$

利用上段的结果，我们有

$$z-z_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(x-x_0)-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(y-y_0),$$

化简得 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\dfrac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0,$

其中偏导数在(x_0, y_0, z_0)点取值，这就是所求的切平面方程．由切平面方程得到 M 点的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right),$$

所以法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

其中偏导数在(x_0, y_0, z_0)点取值，若上式分母有一为零时，约

定相应的分子也为零.

【例5】 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点的切平面.

解: 令 $F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$,

先求出曲面在 M 点的法向量.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{2x}{a^2}\right|_M=\frac{2x_0}{a^2},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{2y}{b^2}\right|_M=\frac{2y_0}{b^2},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M=\left.\frac{2z}{c^2}\right|_M=\frac{2z_0}{c^2}.$$

于是切平面方程为:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

因点 M 在椭球面上,即有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

所以椭球面在 M 点的切平面方程为:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

【例6】 确定正数 λ, 使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在某一点相切.

解: 设两曲面在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点相切,则两曲面在 M 点的法向量方向应该一致. 容易求出第一个曲面在 M 点的法向量为:

$$(y_0z_0,\ z_0x_0,\ x_0y_0),$$

椭球面在 M 点的法向量为:

$$\left(\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{2y_0}{b^2},\ \frac{2z_0}{c^2}\right).$$

两法向量方向一致,则它们的分量应成比例:

$$\frac{y_0z_0}{\frac{2x_0}{a^2}}=\frac{x_0z_0}{\frac{2y_0}{b^2}}=\frac{x_0y_0}{\frac{2z_0}{c^2}},$$

把上式改写成下面形式:

$$\frac{x_0y_0z_0}{\frac{2x_0^2}{a^2}}=\frac{x_0y_0z_0}{\frac{2y_0^2}{b^2}}=\frac{x_0y_0z_0}{\frac{2z_0^2}{c^2}},$$

既然上式各分子相等,它们的分母也应相等,即有

$$\frac{2x_0^2}{a^2}=\frac{2y_0^2}{b^2}=\frac{2z_0^2}{c^2}$$

或
$$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}.$$

又 M 点在椭球面上,可得

$$\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{z_0^2}{c^2}=\frac{1}{3}.$$

由此推出
$$(x_0y_0z_0)^2=\frac{1}{3^3}(abc)^2,$$

$$x_0y_0z_0=\frac{abc}{3\sqrt{3}},$$

所以两曲面相切时,λ 应为 $\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

若曲面由参数方程

$$x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v)$$

给出,函数在 uv 平面上的区域 Δ 上定义,对于 Δ 中一点 $(u_0,\ v_0)$,代入上面函数得

$$x_0=x(u_0, v_0),\ y_0=y(u_0, v_0),\ z_0=z(u_0, v_0),$$

这就是说把(u_0, v_0)变为空间中一点$M(x_0, y_0, z_0)$，当(u, v)跑遍整个区域Δ时，点M就在空间描绘出一张曲面S。现在要求这个曲面在M点的切平面与法线。

先由参数方程的前两式解出

$$\begin{cases} u=u(x, y), \\ v=v(x, y). \end{cases}$$

代入第三式即化为显函数情形：

$$z=z(u(x, y), v(x, y)).$$

由例 4 知 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{A}{C},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{B}{C},$$

其中 $$A=\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},\ B=\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},\ C=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

所以M点的切平面方程为

$$z-z_0=-\frac{A}{C}(x-x_0)-\frac{B}{C}(y-y_0),$$

化简得 $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

曲面在M点的法向量为

$$\boldsymbol{N}=(A, B, C),$$

所以M点法线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

图 1-25

上面的A、B、C都是在(u_0, v_0)点取值。

求法向量分量A、B、C时，雅可比行列式中分母u, v的次序对结果没有影响，因为把u、v次序对换时，A、B、C都变一个符号，仍表示曲面在该点的法向量。雅可比行列式中分子的次序不能搞乱。如求x分量A时，行列式中分子的次序为y、z；求

y 分量 B 时，行列式中分子的次序为 z、x；求 z 分量 C 时，行列式中分子的次序为 x、y. 若用图 1-25 来表示分量与行列式中分子变数次序的关系，算的时候就不容易搞乱了。

习 题 十 六

1. 求出下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

   1) $3x^2+2y^2=2z+1$ 于 $M(1, 1, 2)$ 处；

   2) $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ 于 $M(1, 1, 2)$ 处；

   3) $z=y+\ln\frac{x}{z}$ 于 $M(1, 1, 1)$ 处.

2. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

3. 证明：曲面

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad(a>0)$$

   的切平面在坐标轴上割下的诸线段，其和为一常量.

4. 证明：曲面 $F(cx-az, cy-bz)=0$ 的切平面与某一定直线平行. 其中 a、b、c 为常数.

5. 证明：曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面过一定点，其中 a、b、c 为常数.

6. 证明：曲面 $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ 在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点的法向量，与向量 (x_0, y_0, z_0) 及 (a, b, c) 共面.

7. 求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中一点，使该点的切平面与坐标平面所围的体积最小.

8. 求下列上半球面向上的法向量的方向余弦：

   1) $x^2+y^2+z^2=a^2$；

   2) $x^2+y^2+z^2=2ax$.

9. 求下列曲面在指定点的切平面：

   1) $x=a\cos\varphi\cos\theta$, $y=b\cos\varphi\sin\theta$, $z=c\sin\varphi$ 于 $M(\theta_0, \varphi_0)$ 处；

   2) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ 于 $M(u_0, v_0)$ 处.

6.3 曲线的切线与法平面

给定空间曲线：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),$$

其中 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. 当 $t=t_0$ 时，得到曲线上一点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，其中

$$x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0),\ z_0=z(t_0).$$

求曲线在 M_0 点的切线方程. 由直线的点斜式可知，只要求出曲线在 M_0 点的切向量，即可写出切线方程. 而 M_0 点的切向量可通过割线的极限来求出.

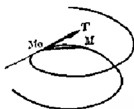


图 1 26

为此我们在 M_0 点附近，任取曲线上一动点

$$M(x(t),\ y(t),\ z(t))$$

(图1 26)，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 表示过 M_0 点割线的方向，向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 除以 $t-t_0$ 的向量仍表示原割线的方向，但

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{t-t_0}=\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right),$$

当动点 M 沿曲线趋于定点 M_0 时，即 $t\to t_0$ 时，上述割线方向的极限向量即为曲线在 M_0 点的切向量，所以 M_0 点切向量 $\boldsymbol{T}$ 为：

$$\boldsymbol{T}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)).$$

这里我们假设 $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)\neq0$. 知道切向量就可写出过 M_0 点的切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

若分母有一为零时，约定相应的分子也为零. M_0 点的法平面

方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

【例 7】 求曲线 $y=x$, $z=x^2$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 的切线与法平面方程.

解：我们把 x 看成参数，曲线的参数方程为

$$x=x,\ y=x,\ z=x^2,$$

那么它在 M 点的切向量为

$$\boldsymbol{T}=(1, 1, 2x)\big|_M=(1, 1, 2).$$

所以过 M 点的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

化简得
$$x+y+2z-4=0.$$

若空间曲线是两个曲面的交线，它的方程为

$$\begin{cases}F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0.\end{cases}$$

求曲线上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的切向量 $\boldsymbol{T}$(图 1-27)，我们通过几何方法来确定曲线在该点的切向量．注意到曲面 $F_1(x, y, z)=0$ 在 M 点的法向量为：

$$\boldsymbol{N}_1=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\Big|_M,$$

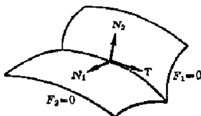


图 1-27

已知向量 $\boldsymbol{T}$ 在 M 点紧贴在曲线上，也就紧贴在曲面 $F_1=0$ 上，而向量 $\boldsymbol{N}_1$ 在 M 点与曲面 $F_1=0$ 垂直，所以向量 $\boldsymbol{N}_1$ 与向量 $\boldsymbol{T}$ 垂直．同理，曲面 $F_2(x, y, z)=0$ 在 M 点的法向量

$$N_2=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial y},\ \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\Big|_M$$

也与向量 $\boldsymbol{T}$ 垂直. 因此向量 $\boldsymbol{T}$ 可由向量 $\boldsymbol{N}_1$ 与 $\boldsymbol{N}_2$ 作向量积得到，即

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix},$$

得出 $\boldsymbol{T}=\left(\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ z)},\ \frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(z,\ x)},\ \frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(x,\ y)}\right).$

若用 A_1、B_1、C_1 来表示 $\boldsymbol{T}$ 的分量，则

$$A_1=\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(y,\ z)},\ B_1=\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(z,\ x)},\ C_1=\frac{\partial(F_1,\ F_2)}{\partial(x,\ y)},$$

这些行列式都在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处取值. 且曲线在 M 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{A_1}=\frac{y-y_0}{B_1}=\frac{z-z_0}{C_1}.$$

M 点的法平面方程为

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0.$$

求切向量的 A_1、B_1、C_1 分量时，行列式中分子 F_1 与 F_2 的次序与结果无关，因为 F_1、F_2 交换次序后，A_1、B_1、C_1 都差一负号，仍表示曲线在 M 点的切向量. 但行列式中分母的次序不能搞乱，求 x 分量时，行列式中分母次序为 y、z; 求 y 分量时，行列式中分母次序为 z、x; 求 z 分量时，行列式中分母次序为 x、y.

【例 8】 求曲线 $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $x^2+y^2=2ax$ 在点 $M(a,\ a,\ \sqrt{2}a)$ 处的切线与法平面.

解：令 $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-4a^2$,

$$g(x,\ y,\ z)=x^2+y^2-2ax,$$

则
$$A_1=\left.\frac{\partial(f,\ g)}{\partial(y,\ z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 2y & 0\end{vmatrix}\right|_M=-4\sqrt{2}\,a^2,$$

$$B_1=\left.\frac{\partial(f,\ g)}{\partial(z,\ x)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 0 & 2x-2a\end{vmatrix}\right|_M=0,$$

$$C_1=\left.\frac{\partial(f,\ g)}{\partial(x,\ y)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 2x-2a & 2y\end{vmatrix}\right|_M=4a^2.$$

所以曲线在 M 点处的切线方程为

$$\frac{x-a}{-4\sqrt{2}\,a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\sqrt{2}\,a}{4a^2},$$

或
$$x+\sqrt{2}\,z=3a,\ y=a.$$

即切线为上述两个平面的交线.

曲线在 M 点的法平面方程为

$$-4\sqrt{2}\,a^2(x-a)+0\cdot(y-a)+4a^2(z-\sqrt{2}\,a)=0,$$

化简得
$$\sqrt{2}\,x-z=0.$$

上面我们讨论了空间曲线的切线与法平面. 若给定平面曲线

$$x=x(t),\ y=y(t),$$

要求曲线上一点 $M(x_0,\ y_0)$的切线与法线. 平面作为空间的特殊情况(相当于$z=0$), 即知曲线在 M 点的切向量为:

$$\boldsymbol{T}=(x'(t_0),\ y'(t_0)),$$

所以曲线在 M 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)},$$

曲线在 M 点的法线方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)=0.$$

若平面曲线由方程

$$F(x, y)=0$$

给出．要求曲线上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线与法线．我们把它作为空间曲面特例来处理，把 $F(x, y)=0$ 看成空间中的柱面，它是平面曲线 $F(x, y)=0$ 垂直上下移动所得的柱面，已知这个曲面在点 $(x_0, y_0, 0)$ 处的法向量为：

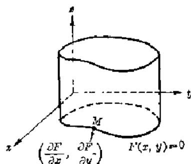


图 1-28

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, 0\right)\Big|_{(x_0, y_0, 0)},$$

法向量 $\boldsymbol{N}$ 在点 $(x_0, y_0, 0)$ 与柱面垂直，也就与柱面上过 M 点的平面曲线 $F(x, y)=0$ 垂直．但法向量 $\boldsymbol{N}$ 实际上是平面向量，所以向量

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$$

为曲线 $F(x, y)=0$ 在 $M(x_0, y_0)$ 点的法向量(见图 1-28)，由此得出曲线在 M 点的切线方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)=0,$$

曲线在 M 点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

注意，上面这些偏导数都是在点 (x_0, y_0) 处取值的．

6.4 平面曲线族的包络线

下面我们用到两曲线相切的概念．若两条曲线有公共点 M，且在 M 点两曲线有公共的切线，则称两曲线在 M 点相切．

在平面上给定一曲线族，其解析表示为

$$f(x, y, \alpha)=0.$$

其中 α 为参数．若固定一个 $\alpha=\alpha_0$，即得曲线族中一条曲线

$$f(x, y, \alpha_0)=0.$$

对于两个不同的 α，所得曲线族中的两条曲线，它们的位置和形状可以不同，让 α 在某一区间取值时，我们就得到一族曲线．如

$$y=\alpha x+\alpha^2,$$

其中 $-\infty<\alpha<+\infty$，它表示一族直线，是一特殊的曲线族．图 1-29 中画出直线族中 $\alpha=-2, -1, 0, 1, 2$ 五条直线．如果我们设想把直线族中所有的直线都画出来了，则这些直线只能填满 xy 平面上的一部分，平面的另一部分是这族直线所无法达到的禁区，这个禁区的边界由图 1-29 看出是以原点为顶点，以 y 轴为对称轴的抛物线，这条抛物线就称为直线族的包络线．

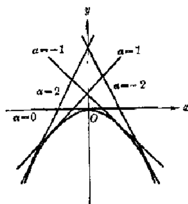


图 1-29

当然不是所有曲线族都有包络线，如曲线族 $y=x+\alpha$，这个直线族的直线填满整个平面，我们说这族直线没有包络线．

上面只是对曲线族包络线的一种直观说法，而不是对概念的确切描述．为了求曲线族的包络线，我们不能停留在直观的说法，必须有确切的定义．我们再分析一下上面的例子，图 1-29 告诉我们，直线族的包络线具有如下性质：抛物线的每一点都与直线族中某一条直线相切，而且直线族中每一条

直线都与抛物线切于一点．这样我们得到下面曲线族包络线的定义．

定义 给定一曲线族，若有一曲线存在，该曲线的每一点都与曲线族中某一条曲线相切，而且曲线族中每一条曲线都与该曲线切于一点，则称该曲线为曲线族的包络线，简称包线．

根据定义，我们可以给出曲线族的包络线的求法．设给定曲线族为

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0,$$

设对应于 α 的那条曲线与包络线的切点为 $(x,\ y)$，因为我们在包络线定义中只假定曲线族中每一条曲线与包线只切于一点，所以切点的坐标 x、y 被 α 唯一地确定．当 α 不同时，切点 $(x,\ y)$ 也不同，从函数的定义来看，切点坐标可以看成是 α 的函数，即

$$\begin{cases} x=x(\alpha), \\ y=y(\alpha). \end{cases}$$

而包络线就是由这些切点组成，所以上式也就是包络线的参数方程．

任意固定参数 α，切点 $(x(\alpha),\ y(\alpha))$ 应在曲线 $f(x,\ y,\ \alpha)=0$ 上，即有

$$f(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha)\equiv 0. \tag{6.2}$$

由于 α 的任意性，上式对变数 α 来说是恒等式，因恒等式对 α 求导仍为恒等式，所以得

$$\begin{aligned} &f'_x(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha)x'(\alpha)+f'_y(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha)y'(\alpha) \\ &\quad +f'_\alpha(x(\alpha),\ y(\alpha),\ \alpha)=0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

由上段知向量

$$(x'(\alpha),\ y'(\alpha))$$

是包络线在点$(x(\alpha), y(\alpha))$处的切向量，而向量

$$(f'_x(x(\alpha), y(\alpha), \alpha), f'_y(x(\alpha), y(\alpha), \alpha))$$

是曲线$f(x, y, \alpha)=0$在点$(x(\alpha), y(\alpha))$处的法向量，由包络线的定义知这两个向量正交，即它们的数量积为零，所以(6.3)式就变为

$$f'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)=0. \qquad (6.4)$$

由(6.2)与(6.4)就可联立得到包络线的参数方程应满足方程组：

$$\begin{cases} f(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)=0, \\ f'_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha)=0. \end{cases}$$

具体求包络线时，我们只要解下列方程组：

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha)=0. \end{cases}$$

把x、y解成第三个变量α的函数，从而得到所求的包络线的参数方程，或由两方程消去α，得到x、y的关系式，这关系式即为包络线所要满足的方程.

【例 9】 求直线族$y=\alpha x+\alpha^2$的包络线.

解：
$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=\alpha x+\alpha^2-y=0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha)=x+2\alpha=0. \end{cases}$$

由第二式解出$\alpha=-\frac{x}{2}$，代入第一式得

$$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=-\frac{x^2}{4},$$

这就是直线族的包络线，它是一条开口向下的抛物线.

【例 10】 设$k>0$，α为参数，求椭圆族

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(k-\alpha)^2}=1$$

的包络线.

解：$$\begin{cases} f(x,\ y,\ \alpha)=\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{(k-\alpha)^2}-1=0, \\ f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=-\dfrac{2x^2}{\alpha^3}+\dfrac{2y^2}{(k-\alpha)^3}=0. \end{cases}$$

由第二式得 $$\frac{x^2}{\alpha^3}=\frac{y^2}{(k-\alpha)^3},$$

代入第一式消去x得

$$\frac{\alpha y^2}{(k-\alpha)^3}+\frac{y^2}{(k-\alpha)^2}=1,$$

化简得 $$ky^2=(k-\alpha)^3.$$

同理可得

$$kx^2=\alpha^3.$$

于是 $$(ky^2)^{1/3}+(kx^2)^{1/3}=k,$$

最终得到包络线的方程为

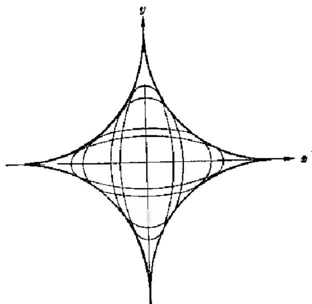


图 1·30

$$x^{2/3}+y^{2/3}=k^{2/3}.$$

所以包络线(图 1-30)是一条星形线，它与椭圆族中每一个椭圆在四点相切。可见，包络线定义中要求曲线族中每一条曲线只与包络线在一点相切不是很确切，确切地定义应这样说：给定一曲线族，若有一曲线存在，该曲线能分成几个分支，每个分支具有前面定义所述性质，则曲线称为曲线族的包络线。如例中的星形线可分成四个分支，即分别位于四个象限中的部分，每部分具有定义所述的性质，所以星形线是椭圆族的包络线。

习 题 十 七

1. 求下列曲线在给定点的切线和法平面方程：

   1) $x=a\sin^2 t,\ y=b\sin t\cos t,\ z=c\cos^2 t$ 于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处；

   2) $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 于 $M(1,\ -2,\ 1)$处。

2. 在曲线 $y=x^2,\ y=x^3$ 上求出一点，使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

3. 证明：螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 的切线与 z 轴形成定角。

4. 证明：曲线 $x=ae^t\cos t,\ y=ae^t\sin t,\ z=ae^t$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

5. 给定抛物线族 $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x-\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)x^2$，其中 g、v_0 为常数，α 为参数，试求它的包络线。

6. 求圆族 $(x-\alpha)^2+y^2=r^2$(r 为常数)的包络线。

7. 求由直线段所组成的族 $\dfrac{x}{\sin\alpha}+\dfrac{y}{\cos\alpha}=l$ (其中 l 为常数，直线段的端点在坐标轴上)的包络线。

8. 求直线族 $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{k-\alpha}=1$($k>0$ 为常数)的包络线。

9. 1) 证明曲面族 $z=\alpha x+\dfrac{y}{\alpha}+f(\alpha)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1;$$

2) 证明上述曲面族的包络面

$$\begin{cases} z=ax+\dfrac{y}{a}+f(a), \\ 0=x-\dfrac{y}{a^2}+f'(a), \end{cases}$$

也满足方程 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$. [提示: 把 a 看成 x、y 的函数]

第七节 高阶导数

7.1 高阶偏导数

在第三节我们利用一阶偏导数，得到了极值的必要条件．要讨论极值的充分条件，就需要用二阶偏导数，在许多实际问题中，大量用到的也是二阶偏导数，二阶以上的偏导数用得较少．这节我们就来讨论高阶偏导数，它可以看成微分法在阶方面的推广．

设在区域 D 上给定二元函数 $z=f(x, y)$，它关于 x、y 的偏导数

$$f'_x(x, y),\ f'_y(x, y)$$

仍是区域 D 上的二元函数．既然是二元函数，我们可以再求这两个二元函数的偏导数（当然假设这些偏导数存在）．对 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 求出的偏导数叫做 $z=f(x, y)$ 的二阶偏导数，按对变量求导次序的不同，共有下列四个二阶偏导数，通常记作：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y).$$

其中第二、三个二阶偏导数，称为函数的二阶混合偏导数．同样可以引入函数 $f(x,\ y)$ 的三阶、四阶以至 n 阶偏导数的概念．因对每一个二阶偏导数可求得两个三阶偏导数，所以二元函数共有 $2^2\times 2=2^3$ 个三阶偏导数．依此类推，函数 $f(x,\ y)$ 共有 2^n 个 n 阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数统称为函数的高阶偏导数．高阶偏导数中除去每次接连只对 x 求导和每次接连只对 y 求导的两个高阶偏导数外，其它都称为高阶混合偏导数．

【例 1】 设 $z=e^{xy}$，求它的二阶偏导数．

解：因 $$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}.$$

所以 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

【例 2】 设 $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，求它的二阶偏导数．

解：这个函数值是点 $(x,\ y)$ 的极角，所以在除去原点的全平面上不是单值函数，但在除去射线 $-\infty<x\leqslant 0$ 的全平面上可以取定一个连续的单值分支，现在我们就对这一个单值分支 $(-\pi<z<\pi)$ 求偏导数．

因 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

由上面两例看出，函数的两个二阶混合偏导数相等，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}. \tag{7.1}$$

发现这一事实并不困难，但现在来证还颇有些难度．在下一章，我们将作为重积分的应用，而顺便证明下列定理：若两个混合偏导数在区域 D 上二元连续，则它们必定相等．这里混合偏导数是连续的这个条件不可缺少，否则我们可以举出反例，使混合偏导数在一点不等．通常我们遇到的函数都是初等函数，各阶偏导数总是连续的，因此混合偏导数总是相等的．

进一步我们可以得出一般性结论，只要高阶混合偏导数连续，则求导与次序无关．如

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}.$$

上面三个偏导数都是一次对 y 求导，两次对 x 求导，只是求导的次序不同．利用二阶混合偏导数相等定理，不难说明上式成立．要说明上式第二个等号成立，只要把二阶混合偏导数

相等定理，应用到函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 身上，即可看出等号成立．要说明上式第一个等号成立，只要把(7.1)对 x 再求一次偏导数，因为恒等式求偏导数仍为恒等式，所以第一个等号成立．

这样，根据混合偏导数与求导次序无关，求二元函数的 n 阶偏导数时，原来要求 2^n 个 n 阶偏导数，现在个数大大减少，只需求 $n+1$ 个 n 阶偏导数．具体求时，例如可以先集中对 x 求然后再对 y 求，它的 $n+1$ 个 n 阶偏导数为

$$\frac{\partial^n f(x,\ y)}{\partial y^k \partial x^{n-k}} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

【例 3】 $z=e^{ax+by}$，其中 a、b 为常数，求它的 n 阶偏导数．

解：$z=e^{ax}\cdot e^{by}$，先对 x 求 $n-k$ 次偏导数得

$$\frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k}}=a^{n-k}e^{ax}\cdot e^{by},$$

再对 y 求 k 次偏导数，得

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^k \partial x^{n-k}}=b^k a^{n-k} e^{ax+by} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n).$$

【例 4】 证明：函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在定义域上满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

解：已知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

进一步可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

【例 5】 证明：函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在定义域上满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

解：为了计算方便，引入中间变量 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $u=\frac{1}{r}$，因 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数 u 对自变量 x、y、z 是对称的，只要把 x 分别换成 y 和 z，即可得出其它两个二阶偏导数。于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$
$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

习 题 十 八

1. 求下列函数的二阶偏导数

  1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$; 2) $z=xy+\frac{x}{y}$;

3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 　　　　4) $z=x\sin(x+y)$;

5) $z=\ln(x+y^2)$; 　　　　6) $u=(xy)^z$.

2．求下列函数所指出的高阶偏导数：

1) $z=\sin(x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$；

2) $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$；

3) $z=\ln(ax+by)$ （a、b 为常数），求 $\frac{\partial^n z}{\partial y^k\partial x^{n-k}}$ （$k=0, 1, \cdots, n$）；

4) $z=xye^{x+y}$，求 $\frac{\partial^n z}{\partial y^k\partial x^{n-k}}$ （$k=0, 1, \cdots, n$）．

3．设 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 在区域 D 上有二阶连续偏导数，且一阶偏导数满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证明 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 在 D 上满足拉普拉斯方程．

4．证明函数

$$u=\frac{2x^2+2y^2+5x+2}{(2+x)^2+y^2},\quad v=\frac{3y}{(2+x)^2+y^2}$$

在定义域上满足拉普拉斯方程．

5．设 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 在满足习题三的条件下，又满足

$$u^2(x, y)+v^2(x, y)=C\quad (C>0\text{ 常数}),$$

证明 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$ 皆为常数．

6．证明函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ （a、b 为常数）满足热传导方程：$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$．

7．证明函数 $u=\varphi(x-ct)+\psi(x+ct)$ （φ，ψ 为任意可微函数）满足弦振动方程 $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$．

8．证明 若函数 $u=u(x, y, z)$，$v=v(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程，则有

$$\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

7.2 复合函数的高阶导数

设 $z=f(\xi, \eta)$，而 ξ，η 又是 x、y 的函数

$$\begin{cases}\xi=\xi(x, y),\\ \eta=\eta(x, y).\end{cases}$$

今求复合函数 $z=f(\xi(x, y), \eta(x, y))$ 的二阶偏导数. 因已知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}.\end{cases}$$

进一步求二阶偏导数时，注意 $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$、$\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$ 仍是 ξ，η 的函数，所以 $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$，$\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$ 仍是 x、y 的复合函数，于是有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\\ &\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

如果给出 $f(\xi, \eta)$，$\xi(x, y)$，$\eta(x, y)$ 的具体表示式，则上面结果中的每一个偏导数都可以具体地求出来.

同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

【例 6】 设 $z=f\left(xy,\ \frac{x}{y}\right)$，求其三个二阶偏导数。

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$.

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left[f_{11}''\cdot y+f_{12}''\cdot\frac{1}{y}\right]+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot y+f_{22}''\cdot\frac{1}{y}\right]$$
$$=y^2f_{11}''+2f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]+f_1'$$
$$+\frac{1}{y}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{1}{y^2}f_2'$$
$$=xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{y^2}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]-\frac{x}{y^2}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$
$$+\frac{2x}{y^3}f_2'=x^2f_{11}''-2\frac{x^2}{y^2}f_{12}''+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''+\frac{2x}{y^3}f_2'.$$

【例 7】 设函数 $f(r,\ t)$ 满足方程

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

证明：函数 $u=\frac{f(r,\ t)}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，满足方程

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

解：因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r}\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{(y^2+z^2)}{r^3}\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r}-2\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{(y^2+z^2)}{r^3},\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r}-2\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{y}{r}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{(z^2+x^2)}{r^3},\\\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r}-2\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{z}{r}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{(x^2+y^2)}{r^3}.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r}-2\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\\&\quad+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\cdot\frac{2}{r}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{1}{r},\end{aligned}$$

又
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\frac{1}{r},$$

由条件 $c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$，即得

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

习 题 十 九

1．求下列函数的二阶偏导数：

1) $u=f(ax,\ by)$；　　2) $u=f(x+y,\ x-y)$；

3) $u=f(x+y,\ xy)$；　　4) $u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$；

5) $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$；　　6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$．

2．若 $f(\xi,\ \eta)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0,$$

证明．函数 $z=f(x^2-y^2,\ 2xy)$ 也满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

3．设 $u=f(x,\ y)$，而 $x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha$，$y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha$（$\alpha$ 为常数），证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

4．证明　函数 $u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u$$

（其中，C_1、C_2 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）．

7.3　隐函数的高阶导数

设方程　　$F(x,\ y,\ z)=0$

确定隐函数 $z=z(x, y)$，试求它的二阶偏导数。

先求一阶偏导数，我们有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{7.2}$$

要求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，上面第一式对 x 再求一次，得

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

化简得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

由(7.2)式解出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 并代入上式，化简得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\,\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2-2\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\,\dfrac{\partial F}{\partial x}\,\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

这里假设 $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$。

同理可求出其余的二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3}$$

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^3}.$$

【例 8】 设方程 $xy+yz+zx=1$ 确定隐函数 $z=z(x, y)$，求它的二阶偏导数.

解：方程分别对 x、y 求偏导数，得：

$$y+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0, \tag{7.3}$$

$$x+z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{7.4}$$

解出 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}.$$

为了求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，(7.3)式对 x 再微一次，得：

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

因此 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2\dfrac{\partial z}{\partial x}}{x+y}=\frac{2(y+z)}{(x+y)^2}.$$

由 x、y 的对称性，可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+z)}{(x+y)^2}.$$

为了求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，(7.3)式对 y 再微一次，得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

因此
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}}{x+y}=\frac{2z}{(x+y)^2}.$$

【例 9】 设 $x=\cos\varphi\cos\psi$, $y=\cos\varphi\sin\psi$, $z=\sin\varphi$. 这样确定了函数 $z=z(x, y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：由前两方程中解出 φ、ψ 是 x、y 的函数，然后代入第三式即得 $z=z(x, y)$. 所以因变量是 z，中间变量是 φ、ψ，自变量是 x、y.

第三式对 x 微两次得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\cos\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \qquad (7.5)$$

为了求 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，由前两式得到

$$\begin{cases}1=-\sin\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\cos\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x},\\[2mm] 0=-\sin\varphi\sin\psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\cos\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}.\end{cases}$$

解出
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

所以

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-\frac{\sin\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}-\cos\psi\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sin^2\varphi}$$
$$=\frac{\sin^2\psi\sin^2\varphi+\cos^2\psi\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi\cos\varphi}.$$

把所得结果代入(7.5)式，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin\varphi\,\frac{\cos^2\psi}{\sin^2\varphi}-\cos\varphi\,\frac{(\sin^2\psi\sin^2\varphi+\cos^2\psi\cos^2\varphi)}{\sin^3\varphi\cos\varphi}$$

$$=-\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi+\sin^2\psi\sin^2\varphi+\cos^2\psi\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}$$

$$=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

习 题 二 十

1. 求由方程 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$ 所确定的函数 $z=z(x, y)$ 的所有二阶偏导数.
2. 求由方程组 $x=u+v$, $y=u^2+v^2$ 所确定的函数 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ 的所有二阶偏导数.
3. 求由下列方程所确定的函数 $u=u(x, y)$ 的所有二阶偏导数.
   1) $u=yz+zx+xy$, $x^2+y^2+z^2=1$;
   2) $u=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$.
4. 证明：由方程 $u=y+x\varphi(u)$ 所确定的函数 $u=u(x, y)$ 满足方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right].$$
5. 设 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
6. 证明：由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ 所确定的函数 $z=z(x, y)$ 满足方程
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$
7. 求下列函数 $z=z(x, y)$ 的二阶偏导数：
   1) $z=f(x+y, z+y)$;
   2) $f(x-y, y-z, z-x)=0$.

7.4 变量替换

许多实际问题可以归结为求带有二阶偏导数的偏微分方

程，求解这些方程往往要作自变量替换，使方程形式变得简单，或使方程由直角坐标系变到其它坐标系中，使其便于讨论．下面我们以拉普拉斯方程为例加以说明．

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{7.6}$$

称为平面拉普拉斯方程，方程的连续解 $u=u(x, y)$ 称为调和函数．如果在圆形区域上求解方程时，我们常常采用极坐标系，这就要求把直角坐标系中的方程(7.6)，变到极坐标系中的拉普拉斯方程．

已知直角坐标与极坐标的变换公式为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

函数 $u=u(x, y)$ 经自变量变换后，就变为 r、θ 的函数，即

$$u=u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=u(r,\ \theta),$$

注意这里 $u=u(x, y)$ 是未知函数，我们把变换后的函数也写成 $u=u(r, \theta)$，并不是说它们有相同的函数关系，只意味着现在的函数 $u(r, \theta)$ 是由原来函数 $u(x, y)$ 变来的．今要由 $u(x, y)$ 满足方程(7.6)来推得函数 $u=u(r, \theta)$ 所应满足的方程．

我们把 x、y 看成中间变量，把 r、θ 看成自变量(若把 x、y 看成自变量，把 r、θ 看成中间变量也可以)，这样来求原函数的偏导数与变换后函数的偏导数之间的关系．先求一阶偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta).$$

再求二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin\theta$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)r\sin\theta-r\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)r\cos\theta-r\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$=-r\sin\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(r\cos\theta)\right]$$

$$+r\cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r\cos\theta)\right]$$

$$-r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)=r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$-2r^2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

所以 $\quad\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$

因此极坐标系中的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,$$

或

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

【例 10】 在函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 类中求解拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

解：显然，我们可把问题化到极坐标系里来讨论，即在形状为 $u=f(r)$ 的函数中求解拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

既然函数不依赖于 θ，所以问题变为只含一个自变量的方程，相应的偏导数记号改作导数记号，即求函数 $u=f(r)$ 使其满足方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0,$$

或
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0,$$

解得
$$r\frac{du}{dr}=C_1\quad(C_1\text{ 为常数}),$$

$$\frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r},$$

所以
$$u=C_1\ln r+C_2\quad(C_2\text{ 为常数}).$$

最终我们求得解为

$$u=C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

如果不要 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 形状的解，则拉普拉斯方程的解有无穷多个，例如 x^2-y^2, $2xy$, $e^x\sin y$ 等等都是解.

利用上面的结果，我们可以得出空间拉普拉斯方程在柱坐标和球坐标系中的形式．给定空间直角坐标系中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{7.7}$$

作自变量变换

$$
\begin{cases}
x=r\cos\theta, \\
y=r\sin\theta, \\
z=z.
\end{cases} \tag{7.8}
$$

由原自变量 x、y、z 变到柱坐标系中的柱坐标 r、θ、z，事实上第三个变量并未变，可以归结为平面直角坐标与平面极坐标之间的变换，套用前面的结果，得到柱坐标系中的拉普拉斯方程为

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{7.9}
$$

若把空间直角坐标变到空间球坐标系，即

$$
\begin{cases}
x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\
y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\
z=\rho\cos\varphi.
\end{cases} \tag{7.10}
$$

而这个变换可以看成下面两个变换

$$
\begin{cases}
x=r\cos\theta, \\
y=r\sin\theta, \\
z=z,
\end{cases}
\quad 及 \quad
\begin{cases}
z=\rho\cos\varphi, \\
r=\rho\sin\varphi, \\
\theta=\theta
\end{cases}
$$

的复合．先作第一个变换时即得方程(7.9)．对方程(7.9)再作第二个变换时，注意$(z,\ r)$与$(\rho,\ \varphi)$之间的变换正好是平面直角坐标与平面极坐标之间的关系，所以

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{7.11}
$$

为了使(7.9)中的 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 用 $\frac{\partial u}{\partial \rho}$，$\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ 表示出来．我们有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \rho}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \rho}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}.
\end{cases}
$$

或
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho\dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \rho\dfrac{\partial u}{\partial z}\sin\varphi. \end{cases}$$

解出
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}. \tag{7.12}$$

把(7.12)、(7.11)代入(7.9)得:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho\sin\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

化简得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

或
$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

这就是球坐标系中的拉普拉斯方程.

习题二十一

1. 在函数类 $u = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 中求解拉普拉斯方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. 利用方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 的解为 $u = f(\xi) + g(\eta)$. 试作自变量替换 $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ 来求解弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

3. 用变换 $\xi=x+3y,\ \eta=x+y$ 来解方程

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

4. 用变换 $x=e^s,\ y=e^t$ 来变换方程 $ax^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$(其中 a、b、c 均为常数).

5. 解方程 $3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

6. 在函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ t)$ 中求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

[提示:化为球坐标系后,考虑函数 $w=ru$. 再对函数 w 应用第 2 题的结果.]

第八节 泰勒公式

在第四节我们讨论了二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在一点的微分. 微分的意义就是在一点附近用一次多项式去逼近一般的函数. 但在有些实际问题中,嫌一次逼近精度不够,需要用二次多项式去逼近一般的函数;例如在最优化等实际问题中,从问题的性质来看,用一次多项式逼近是没有意义的,而必须用二次多项式去逼近才有意义. 所以我们要把一次逼近加以推广,讨论用高次多项式去逼近一般的函数. 用三次多项式去逼近一般的函数,在实际问题中用得较少,所以我们着重讨论二次多项式逼近,即展开到二次的泰勒公式.

在讲二元泰勒公式之前,先复习一下一元函数的泰勒公式. 设一元函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[-a,\ a]$ $(a>0)$ 上有直到 n 阶的导数,则 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 点可以展开成泰勒公式:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}$$

$$+\frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(\theta t)\quad(-a\leqslant t\leqslant a,\ 0<\theta=\theta(t)<1).$$

用多项式去逼近一般函数的意义很大．因多项式是一类最简单的函数，对多项式的性质我们了解得最清楚，它的计算也最方便，只涉及加、减、乘的运算．所以在理论上和计算上对用各种各样多项式逼近一般函数的问题，有许多深入的讨论．用泰勒公式去逼近一般的函数，只是用多项式去逼近一般函数的一种方法．

8.1 泰勒公式

下面讨论二元函数的泰勒展开．设 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上有直到三阶的连续偏导数，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 上一点，$P(x_0+h, y_0+k)$ 为 D 上的动点，并假设动点 P 与定点 P_0 的联线属于区域 D(图 1-31)，我们的问题就是在一次逼近的基础上，考虑用如下关于 h, k 的二元二次多项式

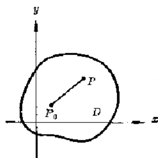


图 1-31

$$f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}k+Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

去逼近一般的关于 h, k 的二元函数 $f(x_0+h, y_0+k)$．现在要确定常数 A、B、C，并给出对逼近误差的估计．

怎样解决这个问题呢？最自然的想法是把它变成一元问题，利用一元函数的泰勒公式得出二元函数的泰勒公式．那

么怎样才能变成一元问题呢？说起来也很简单，把动点 P 暂时固定，作一条辅助直线段 PP_0，直线段 PP_0 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+th, \\ y=y_0+tk. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

当局限于线段 PP_0 来考察二元函数时，二元函数就变成关于 t 的一元函数，我们将这个一元函数记作

$$\varphi(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk).$$

参数 $t=0$ 对应于 P_0 点，参数 $t=1$ 对应于 P 点．这样就把二元函数在动点 P 的值，变为一元函数在定点 $t=1$ 处的值．利用 $\varphi(t)$ 的一元泰勒公式，即可得出二元函数 $f(x_0+th, y_0+tk)$ 的二元泰勒公式．

下面通过具体的演算来实现这一想法．对 $\varphi(t)$ 应用一元函数的泰勒公式，展开到二次项得：

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\frac{t^3}{3!}\varphi'''(\theta t),$$

其中 θ 依赖于 t，但不管 t 取区间 $[0, 1]$ 内的任何值，θ 总满足 $0<\theta<1$．在上式中令 $t=1$，即得

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\frac{1}{3!}\varphi'''(\theta). \qquad (8.1)$$

现在只要把 $\varphi(t)$ 及其导数用函数 $f(x, y)$ 及其偏导数表示出来，就可得出二元函数的泰勒公式．

我们有

$$\varphi(1)=f(x_0+h,\ y_0+k), \qquad (8.2)$$

$$\varphi(0)=f(x_0,\ y_0). \qquad (8.3)$$

由复合函数微分法，得

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f(x_0+th,\ y_0+tk)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0+th,\ y_0+tk)}{\partial y}k,$$

所以

$$\varphi'(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)_{P_0},\tag{8.4}$$

上式右端记号表示偏导数在 P_0 点取值.

又由

$$\varphi''(t)=\frac{\partial^2 f(x_0+th,\ y_0+tk)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_0+th,\ y_0+tk)}{\partial x\partial y}hk$$
$$+\frac{\partial^2 f(x_0+th,\ y_0+tk)}{\partial y^2}k^2,$$

所以

$$\varphi''(0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)_{P_0}.\tag{8.5}$$

同理

$$\varphi'''(\theta)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k\right.$$
$$\left.+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\right)\bigg|_{P^*},\tag{8.6}$$

上式右端表示在 $P^*(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$ 点取值，点 P^* 位于直线段 PP_0 上.

把(8.2)至(8.6)的式子代入(8.1)，即得二元函数的泰勒公式:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)\bigg|_{P_0}$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)\bigg|_{P_0}$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}h^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}h^2k+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}hk^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}k^3\right)\bigg|_{P^*}.\tag{8.7}$$

上面公式写起来比较复杂，也不便记忆. 但细一观察，发现每项的形式很有规律，类似于二项式展开. 为此我们引入算符或算子的概念. 算符概念是函数概念的推广，函数概念

是刻划数与数之间的对应关系，它把一个数变成另一个数；而算符概念是刻划函数与函数之间的对应关系，它把一个函数变成一个函数，所以算符的定义域是函数的集合，它的值域也是函数的集合．如 $\frac{d}{dx}$ 就是一个算符，它把函数 $\ln x$ 变成 $\frac{1}{x}$，把函数 $\sin x$ 变成 $\cos x$，一般地把函数 $f(x)$ 变成函数 $f'(x)$，所以这个算符的定义域是所有可微函数的集合．同样我们引入算符

$$h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y},$$

其中 h、k 看成常数，它作用在二元函数 $f(x, y)$ 上，得到新的二元函数

$$h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}.$$

而算符

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

理解成按二项式展开后所得的算符，即为

$$h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

一般地可以写出算符

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n.$$

这样一来，(8.7) 中的第二、三项是先用算符 $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ 作用到函数 $f(x, y)$ 上，得出新的函数，然后用 $P_0(x_0, y_0)$ 点代入新的函数所得的值．而 (8.7) 中最后一项，是先用算符 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3$ 作用到函数 $f(x, y)$ 上，得出新的函数，然后用 $P^*(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ 点代入该函数所得

的值．于是(8.7)可改写成更简洁的形式：

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),\qquad(8.8)$$

其中 $0<\theta<1$.

这个公式不难推广至任意次数的泰勒公式：

$$f(x_0+h,\ y_0+k)$$
$$=f(x_0,\ y_0)+\sum_{l=1}^{n}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(x_0,\ y_0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$
$$(0<\theta<1).$$

我们称上述公式为拉格朗日余项形式的泰勒公式．特别当 $n=0$ 时，公式变为

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)$$
$$+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta h)\quad(0<\theta<1).\quad(8.9)$$

这就是一元函数中拉格朗日中值定理的推广．

公式(8.8)中的 h、k 不必很小，只要点 P 及线段 PP_0 位于区域 D 内即成．当然这时余项不能保证很小，但我们可以证明，当 h、k 充分小时，余项的值要比前面各项的值小得多。事实上，令 PP_0 间的距离为 ρ，则

$$\rho=\sqrt{h^2+k^2},$$

这样余项就可写成

$$\frac{1}{3!}\rho^3\left(\frac{h}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k),$$

上式 ρ^3 是当 $\rho\to0$ 时的三阶无穷小量，而后面的因子由于

$$\left|\frac{h}{\rho}\right|\leqslant1,\quad\left|\frac{k}{\rho}\right|\leqslant1.$$

和假设 $f(x, y)$ 的所有三阶偏导数在 D 上有界，所以

$$\left(\frac{h}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$

是一有界变量，故余项是 ρ 的三阶无穷小量，当然是高于 ρ 的二阶无穷小量，记作 $o(\rho^2)$．而(8.8)中第二、三项分别为 ρ 的一阶、二阶无穷小量，所以当 $\rho\to0$ 时，余项比前面各项趋于零来得快．公式(8.8)也可写成：

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,\ y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,\ y_0)+o(\rho^2). \qquad (8.10)$$

我们称上式为**皮亚诺余项形式的泰勒公式**．当 h、k 充分小时，我们可以放心地用二次多项式近似代替一般函数，因为引起的误差总是高于二阶的无穷小量．

【例 1】 将函数 $f(x, y)=e^x\cos y$ 在 $(0, 0)$ 点邻域内用皮亚诺余项形式展开到二次项．

解法一：先求出下列各值：

$$f(0,\ 0)=e^x\cos y|_{(0,0)}=1,$$
$$f'_x(0,\ 0)=e^x\cos y|_{(0,0)}=1,$$
$$f'_y(0,\ 0)=-e^x\sin y|_{(0,0)}=0,$$
$$f''_{xx}(0,\ 0)=e^x\cos y|_{(0,0)}=1,$$
$$f''_{xy}(0,\ 0)=-e^x\sin y|_{(0,0)}=0,$$
$$f''_{yy}(0,\ 0)=-e^x\cos y|_{(0,0)}=-1.$$

然后在(8.8)中，令 $x_0=0,\ y_0=0,\ h=x,\ k=y,\ \rho=\sqrt{h^2+k^2}$，即得

$$e^x\cos y=1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+o(\rho^2).$$

解法二：直接利用一元函数的泰勒展开来求二元函数的泰勒展开式. 因

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(\rho^2),$$

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2!}+o(y^2)=1-\frac{y^2}{2!}+o(\rho^2).$$

所以

$$e^x\cos y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(\rho^2)\right)\cdot\left(1-\frac{y^2}{2!}+o(\rho^2)\right)$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}(x^2-y^2)+o(\rho^2),$$

其中 $-\frac{xy^2}{2!}$ 及 $\frac{x^2y^2}{(2!)^2}$ 除以 $\rho^2=h^2+k^2$ 后，当 $\rho\to0$ 时是趋于零的量，因此可以合并到 $o(\rho^2)$ 中去. 这样得到的展式是不是泰勒展式，严格来说需要证明，但关于这一点我们就不讨论了.

【例 2】 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解. 若用泰勒公式作近似计算，首先要看出二元函数 $f(x, y)$ 是什么，x_0、y_0 是什么，h、k 又是什么. 对这题我们可以把它看成求二元函数 $f(x, y)=x^y$ 在一点的值，其中 $x_0=1$, $y_0=2$, $h=0.04$, $k=0.02$.

先求函数 $f(x, y)=x^y$ 在 $(1, 2)$ 点的二阶展开式的诸系数：

$$f(1, 2)=x^y\big|_{(1,2)}=1,$$

$$f'_x(1, 2)=yx^{y-1}\big|_{(1,2)}=2,$$

$$f'_y(1, 2)=x^y\ln x\big|_{(1,2)}=0,$$

$$f''_{xx}(1, 2)=y(y-1)x^{y-2}\big|_{(1,2)}=2,$$

$$f''_{xy}(1, 2)=[x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x]\big|_{(1,2)}=1,$$

$$f''_{yy}(1, 2) = x^y(\ln x)^2\big|_{(1,2)} = 0.$$

应用公式(8.10)得

$$1.04^{2.02} \approx 1 + 2\times 0.04 + \frac{1}{2}[2\times(0.04)^2 + 2\times 0.04\times 0.02]$$

$$= 1 + 0.08 + 0.0024 = 1.0824.$$

【例 3】 若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上有 $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$，$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$，证明 $f(x, y)$ 在区域 D 上为一常数.

解：若区域 D 中存在一点 $P_0(x_0, y_0)$，对 D 中任意一点 P，联线 PP_0 都属于区域 D（图 1-32），具有这种性质的区域称为是关于 P_0 的星形区域. 对 D 中任意一点 P，应用 P_0 点的泰勒公式(8.9)，由一阶偏导数为零，所以余项为零，得

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \equiv f(x_0, y_0),$$

即 D 上任意一点的函数值与 P_0 点函数值相同，故 $f(x, y)$ 为一常数.

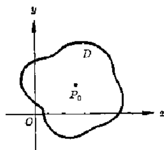


图 1-32

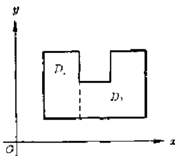


图 1-33

若区域 D 中找不出一点 P_0，使 D 关于 P_0 为星形区域. 我们总可以作辅助线把 D 分成若干个子区域（图 1-33）. 设如图把 D 分成两个区域 D_1、D_2，而每一个区域都存在一点，使区域关于该点成为星形区域. 由上面所证知函数分别在

D_1、D_2 上为一常数，但函数在辅助线上是连续的，这说明 D_1 上常数与 D_2 上的常数必需相同，所以函数在整个区域 D 上为一常数．

习题二十二

1. 在点(1, −2)处把函数

$$f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$$

展开成泰勒公式的形式．

2. 在 (0, 0) 点邻域内按皮亚诺余项形式的泰勒公式展开下列函数至二次项：

1) $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$；　　2) $f(x, y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$；

3) $f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$．

3. 在(1, 1)点邻域按皮亚诺余项形式的泰勒公式展开函数

$$f(x, y)=\frac{x}{y}$$

到二次项．

4. 设 $z=z(x, y)$ 由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定，对函数 z 在(1, 1)点按皮亚诺余项形式的泰勒公式展开到二次项．

5. 设 D 关于原点是星形区域，函数 $f(x, y)$ 有连续偏导数，且在 D 上成立

$$xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y)\equiv 0,$$

证明 $f(x, y)$ 在 D 上为一常数．

8.2 隐函数存在定理

在讲隐函数的微分法时，我们总是假设方程

$$F(x, y, z)=0$$

确定一个隐函数 $z=z(x, y)$，且具体求它的偏导数时，还假定 $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$．现在我们来讨论究竟 $F(x, y, z)$ 满足什么条件时，

隐函数存在，而且条件 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ 与隐函数存在有什么关系，只有这些问题解决了，上面第六节的隐函数微分法就有了理论基础。

我们假设函数 $F(x, y, z)$ 在某个三维区域中具有连续的偏导数，在这个条件下要讨论方程 $F(x, y, z)=0$ 在变量 x、y 的某个区域中是否有解是个很棘手的问题，简直无从入手。但如果我们只限制在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点的充分小邻域内讨论方程是否有解时，泰勒逼近法就可以作为非常有用的工具。这种限制在充分小邻域中讨论问题的所谓局部方法已在许多地方显示了威力，我们曾用它解决了求瞬时速度、曲边梯形的面积等问题，现在还是用它来解决隐函数的存在问题。

在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点附近，由泰勒公式，函数可以用线性函数来逼近：

$$F(x, y, z)=F(x_0, y_0, z_0)+F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)$$
$$+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. 所以在 M 点附近，函数 $F(x, y, z)$ 近似可以看成线性函数，所忽略的项是 $o(\rho)$. 这样求方程 $F(x, y, z)=0$ 的解，就近似相当于求线性方程

$$F(x_0, y_0, z_0)+F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)$$
$$+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0$$

的解。

首先，我们看出要使线性方程在 M 点附近有解，必须有 $F(x_0, y_0, z_0)=0$, 否则当动点 (x, y, z) 与 (x_0, y_0, z_0) 充分靠近时，上式第一项不为零，而后三项的值可以很小很小，其和

不可能为零，即线性方程在 M 点附近无解．于是我们得出了线性方程在 M 点附近有解的第一条件为：

$$F(x_0, y_0, z_0)=0.$$

其次，我们看出要使线性方程有界，还必须在 M 点有一个偏导数不为零，比如说 $F_z'(x_0, y_0, z_0)\neq 0$，我们可以把 z 解成 x、y 的函数：

$$z=z_0-\frac{F_x'(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

一般来说，只要关于那一个变量的偏导数不为零，就可以把该变量解成其余变量的函数，这是线性方程有解的第二个条件．

既然在 M 点附近一般函数与线性函数差别甚微，上面的条件也是一般函数方程有解的条件，这样就有下面隐函数存在定理（其严格证明从略）．

定理 9 设函数 $F(x, y, z)$ 在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点附近有连续的偏导数，且满足

$$F(x_0, y_0, z_0)=0,$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\neq 0,$$

则存在 (x_0, y_0) 的某一邻域，在该邻域内存在连续可微函数

$$z=f(x, y),$$

使满足 $$z_0=f(x_0, y_0),$$

且 $$F(x, y, f(x, y))\equiv 0.$$

定理中的结论读者可能会觉得有点怪，为什么不说方程 $F(x, y, z)=0$ 有解 $z=f(x, y)$，这样不是更简单吗！但进一步追问“解”是什么意思，就会发现上面的话是不确切的．在初等数学中所谓代数方程的解，就是说若存在一个数，把它代入方程后，使方程成立，则称该数为方程的解．现在说函数方

程有解，应该是在(x_0, y_0)附近存在一个函数$z=f(x, y)$，它过M点，代入方程后使方程成为恒等式，那末我们说$z=f(x,y)$就是方程$F(x, y, z)=0$的解.

定理的结论可能会觉得不够理想，因为只得到在M点的邻域内有解；能否给出较大范围内有解的定理呢？遗憾的是没有这种定理，我们只能把大范围分成许多小块，先分别在每个小块上应用隐函数存在定理说明解的存在性，然后又证明在这些小块的两两重迭部分上是一致的，最后再把这些解拼凑起来，得到大范围上的解.

由定理看出，求隐函数微分时，设方程$F(x, y, z)=0$确定隐函数$z=z(x, y)$与假设$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$是一致的．具体求隐函数微分而进行运算时，一般可以不验证这些条件是否满足.

为了对定理有感性的认识，我们考察最简单的例子．如方程

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

在$M(0, 0, 1)$点满足隐函数存在定理的条件：

$$(x^2+y^2+z^2-1)\big|_{(0,0,1)}=0,$$

$$2z\big|_{(0,0,1)}=2\neq 0.$$

定理保证在$(0, 0)$点附近一定存在函数$z=z(x, y)$．对此具体问题我们甚至可以写出其表达式

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

它在$(0, 0)$点的值为1，且代入方程得恒等式

$$x^2+y^2+(\sqrt{1-x^2-y^2})^2=1.$$

同理，方程在$M(0, 0, -1)$点也满足定理的条件，同样在$(0, 0)$点附近存在函数

$$z=-\sqrt{1-x^2-y^2},$$

它在(0, 0)点的值为 -1, 且代入方程得恒等式

$$x^2+y^2+(-\sqrt{1-x^2-y^2})^2=1.$$

隐函数存在定理可以推广到方程组情形.

定理 10 设 $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ 在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 点邻域内有连续的偏导数, 且

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0)=0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0)=0, \end{cases}$$

与

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}\right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

则存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在该邻域内存在连续可微函数

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$$

满足

$$\begin{cases} y_0=y(x_0), \\ z_0=z(x_0), \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} F_1(x, y(x), z(x))=0, \\ F_2(x, y(x), z(x))=0. \end{cases}$$

第九节　方向导数与梯度

9.1　方向导数

在第三节中我们把求函数的极值点问题, 归结为求联立方程组的解. 事实上这一方法在自变量个数较多时没有多大用处, 因为变量个数较多时我们仅对解线性方程组有成熟的理论和技巧, 而对一般的非线性方程组简直无能为力. 有了电子计算机以后, 出现了许许多求极值的新方法, 这些方法避开了解方程组, 而主要是利用梯度概念, 直接去找函数的极值

点．但要介绍梯度概念，先要讲方向导数．

我们知道函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 分别刻划了函数沿两个坐标轴正向的变化率．但有时我们也需要讨论函数在该点沿任一方向的变化率．

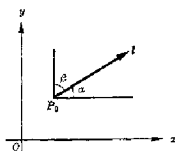


图 1 34

设给定点 $P_0(x_0,y_0)$ 及单位向量

$$l=(\cos\alpha,\ \cos\beta),$$

其中 α、β 分别表示方向 l 与 x 轴正向和 y 轴正向所夹的角度．这里 β、α 不是独立的，当 α 给定时，β 也就随之而定，由图 1 34 看出：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，所以单位向量 l 也可记作

$$l=(\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

要讨论二元函数 $f(x,y)$ 沿 l 方向的变化率，我们设法变为一元函数问题．已知过 P_0 点及以 l 为方向的直线方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha.\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

当动点局限于直线上变动时，二元函数就变为 t 的一元函数

$$z=f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha).$$

这个一元函数在 $t=0$ 点的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点沿 l 方向的方向导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{df(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

当 $\alpha=0$ 时，方向导数就是 $\frac{\partial f}{\partial x}$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，方向导数就

是 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$；当 $\alpha=\pi$ 时，方向导数是 $-\dfrac{\partial f}{\partial x}$，而不是 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. 一般来说，当两个方向正好相反时，其方向导数相差一负号.

方向导数刻划函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化情况. 若函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数大于零，则沿着 $\boldsymbol{l}$ 方向看时，函数在 P_0 点是递增的，具体地说，对充分小的 t，若 $t>0$ 时，函数值 $f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)$ 大于 $f(x_0,\ y_0)$，若 $t<0$ 时，函数值 $f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)$ 小于 $f(x_0,\ y_0)$；若函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数小于零，则沿着 $\boldsymbol{l}$ 方向看时，函数在 P_0 点是递减的，具体地说，对充分小的 t，若 $t>0$ 时，函数值 $f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)$ 小于 $f(x_0,\ y_0)$，若 $t<0$ 时，函数值 $f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)$ 大于 $f(x_0,\ y_0)$；当函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为零时（注意此时，其反方向的方向导数亦为零），则函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向及其反方向的变化是稳定的（即为 Δt 的高阶无穷小）.

若函数 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 点可微，根据复合函数求导规则，有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\sin\alpha,$$

这说明，在函数 $f(x,\ y)$ 可微条件下，只要知道其两个偏导数，即可求出沿任一方向的方向导数.

【例 1】 求 $f(x,\ y)=x^2-y^2$ 在点 $(3,\ 4)$ 沿与 x 轴夹角为 $+45°$ 方向的方向导数.

解：因
$$f'_x(3,\ 4)=2x\big|_{(3,4)}=6,$$
$$f'_y(3,\ 4)=-2y\big|_{(3,4)}=-8.$$

由偏导数连续，知函数在 $(3,\ 4)$ 点可微，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(3,4)}=6\times\cos 45°+(-8)\times\sin 45°=\frac{6-8}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}.$$

对于三元函数 $u=f(x, y, z)$，同样可以定义它在一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数. 设 $\boldsymbol{l}$ 方向为

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中 α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{l}$ 与 x、y、z 轴正向的夹角. 则函数在 P_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{df(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)}{dt}\bigg|_{t=0},$$

当函数在 P_0 点可微时，有方向导数的计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (9.1)$$

其中偏导数在 P_0 点取值.

9.2 梯度

函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 P_0 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，刻划函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化情况，我们要问函数在 P_0 点究竟沿哪一个方向增加最快呢? 如果只有有限个方向，通过一一比较容易看出沿哪个方向的方向导数最大，函数就沿该方向增加最快. 现在过 P_0 点可以作无数个方向，怎么从无数个方向中找出函数增加最快的哪个方向呢?

为此我们把计算方向导数的公式改写成向量形式. 令

$$\boldsymbol{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0},$$

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

由向量的数量积规则，(9.1)式可写成

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{l}=|\boldsymbol{g}|\cdot|\boldsymbol{l}|\cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{l})=|\boldsymbol{g}|\cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{l}). \quad (9.2)$$

这样，把方向导数分解成两个因子相乘. 第一个因子是向量 $\boldsymbol{g}$ 的长度，它只与给定点 P_0 有关，而与方向 $\boldsymbol{l}$ 无关; 第二个因

子只与向量 $\boldsymbol{g}$ 和方向 $\boldsymbol{l}$ 的夹角有关. 所以当方向 $\boldsymbol{l}$ 改变时，第一个因子不变，只第二个因子有变化. 第二个因子当 $\boldsymbol{l}$ 方向与 $\boldsymbol{g}$ 方向一致时，达到最大值 1. 由此可知，向量 $\boldsymbol{g}$ 的方向，是函数 $f(x, y, z)$ 在 P_0 点增加最快的方向. 由于这时 $\cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{l})=1$，所以向量 $\boldsymbol{g}$ 的长度 $|\boldsymbol{g}|$，就是函数沿该方向的方向导数.

于是就有梯度的定义.

定义 函数 $u=f(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的梯度为一向量，它的方向是使函数值增加最快的方向，它的大小是函数沿该方向的方向导数. 记作 $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$，当不必强调 P_0 点时，也简记作 $\operatorname{grad} f$.

由上知 $\operatorname{grad} f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

梯度向量在形式上与以前学过的曲面 $f(x, y, z)=0$ 的法向量

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

完全一样. 但需注意，法向量是对曲面方程而言，位在曲面上的；而梯度向量是对函数 $u=f(x, y, z)$ 而言，位在函数的定义域上的.

有了梯度概念后，公式(9.2)给出了方向导数与梯度的关系：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\operatorname{grad} f|\cos(\operatorname{grad} f, \boldsymbol{l}).$$

上式表明函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数，等于梯度在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影(图 1 35). 当方向 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量的夹角小于 90° 时，梯度在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影是正的，即 $\dfrac{\partial f}{\partial l}>0$，所以沿这种 $\boldsymbol{l}$ 方向看时，函

数值在 P_0 点是增加的，若动点 P 从 P_0 出发往 $\boldsymbol{l}$ 方向作微小移动时，P 点函数值比 P_0 点的函数值大；当方向 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量夹角大于 $90°$ 时，梯度在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影是负的，即 $\frac{\partial f}{\partial l}<0$，所以沿这种 $\boldsymbol{l}$ 方向看时，函数值在 P_0 点是减少的，若动点 P 从 P_0 出发往 $\boldsymbol{l}$ 方向作微小移动时，P 点函数值比 P_0 点函数值小；当方向 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量垂直时，梯度在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影为零，即 $\frac{\partial f}{\partial l}=0$，故函数沿此 $\boldsymbol{l}$ 方向看时，函数值在 P_0 点是稳定的.



图 1-35

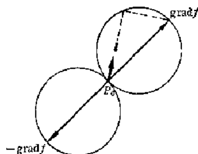


图 1-36

我们可以用几何图形表示梯度与方向导数的关系. 设二元函数 $u=f(x, y)$，它的梯度向量为：

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

在 P_0 点用梯度向量和负梯度向量为直径作两个圆(图1-36)，从 P_0 出发沿 $\boldsymbol{l}$ 方向引一条射线，射线位在圆内的长度就是梯度沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影，即为函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数. 若射线位在以梯度为直径的圆内，则方向导数为正；若射线位在以负梯度为直径的圆内，则方向导数为负.

【例2】 $u=\frac{1}{r}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 grad u.

解：已知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

所以

$$\text{grad}\, u=\left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right)=\frac{-1}{r^3}(x,\ y,\ z)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$。

【例3】 设 $u=f(x,\ y,\ z)$ 在空间区域 D 上连续可微，L 为 D 中一条曲线,其方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),\quad 而\quad \begin{cases}x_0=x(t_0),\\ y_0=y(t_0),\\ z_0=z(t_0),\end{cases}$$

$P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为 L 上一点,曲线 L 在 P_0 点的切向量为:

$$\boldsymbol{T}=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)),$$

向量 $\boldsymbol{T}$ 的单位向量记作 $\boldsymbol{l}$, 若在 P_0 点有

$$\frac{\partial f}{\partial l}>0,$$

证明：一元函数 $u(t)=f(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 在 $t=t_0$ 点是递增的(图 1-37)。

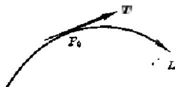


图 1-37

解：条件是说当动点沿 $\boldsymbol{T}$ 方向作微小移动时，动点函数值比 P_0 点函数值大. 而要证明的是当动点沿曲线 L 作微小移动时,动点的函数值比 P_0 点的函数值大. 为此只要证明 $u'(t_0)>0$ 即成. 由复合函数求导公式有

$$u'(t)=f'_x(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t)$$
$$+f'_y(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t)$$
$$+f'_z(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t),$$

令 $t=t_0$，得

$$u'(t_0)=f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)x'(t_0)+f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)y'(t_0)$$
$$+f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)z'(t_0)$$
$$=\mathrm{grad}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{T}=|\boldsymbol{T}|\mathrm{grad}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}=|\boldsymbol{T}|\frac{\partial f}{\partial l},$$

已知 $|\boldsymbol{T}|>0$，$\frac{\partial f}{\partial l}>0$，就有 $u'(t_0)>0$，所以一元函数 $u(t)$ 在 t_0 点是递增的．

习题二十三

1．求函数 $u=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $P(1,\ 1)$ 沿与 x 轴的正向夹角 $\alpha=60°$ 方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数．

2．求函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $P(1,\ 1)$ 沿与 x 轴正向夹角为 α 方向 $\boldsymbol{l}$ 上的方向导数，在怎样的方向上此方向导数有 1) 最大值；2) 最小值；3) 等于零．

3．求函数 $u=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在此点内法线方向上的方向导数．

4．设 $u=f(x,\ y)$ 在 $P_0(x_0,\ y_0)$ 点可微，在 P_0 点给定 n 个单位向量 $\boldsymbol{l}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial l_i}=0.$$

5．设 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上连续可微，$P_0(x_0,\ y_0)$ 为 D 中一点，证明：对任一方向 $\boldsymbol{l}$，在 P_0 点的方向导数与偏导数满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2};$$

反之，P_0 点任给两个方向 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，它们之间的夹角为 $\theta(0<\theta<\pi)$，

证明：P_0 点方向导数与偏导数满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2}.$$

6．求函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度．并问在何点处，其梯度 1）垂直于 Z 轴，2）平行于 Z 轴；3）等于零．

7．求函数 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 处的两梯度之间的夹角．

8．设 $u=u(x, y, z)$，$v=v(x, y, z)$，证明下列公式：

1）$\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$；

2）$\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v$；

3）$\operatorname{grad} u^2=2u\operatorname{grad} u$；

4）$\operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u$；

5）$\operatorname{grad} f(u, v)=\dfrac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u+\dfrac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v$．

9.3 最速下降法

最速下降法是求多元函数极值的一种方法，它是利用梯度概念直接寻找函数的最小值．这种求极值方法很早就有，由于计算量过大，一直未被采用．自从电子计算机出现后，这个方法便成为一种现实可行的方法，引起了人们的重视和不断的改进．这里所介绍的是最速下降法的思想．

为了形象化起见，把求函数的最小值，想象求太湖的最深深度．先在地面上取定坐标 $O\text{-}xy$，z 轴向上，并设湖底曲面可以用一具有连续可微的函数

$$z=f(x, y)$$

来表示．求太湖的最深深度，相当于求二元函数 $f(x, y)$ 的最小值．

现有一测量船，用特制的仪器可以测得每一点湖的深度，也就是说可以算出任意一点的函数值. 所以对这个函数，我们可以说又了解又不了解，所谓不了解是指函数的具体表达式不知道，想用以前讲的求极值方法则用不上；所谓了解是指给定一点(x, y)后，总可以通过仪器测出该点的函数值. 对这样的一个函数怎么求它的最小值呢？

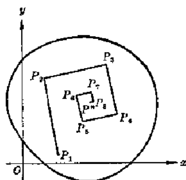


图 1-38

设测量船从湖边某一点P_1出发(图1-38)，但船究竟往哪个方向开好呢？当然不能沿着岸边航行，那样永远也不会达到最深点. 自然应向着湖的中心方向开去，可是太湖大得无边无际，一眼望去根本看不到对岸，无法判断哪个方向是指向湖中心. 一种办法是碰运气，盲目地航行，这当然不是一种科学的方法；一种想法是虽然不能直指湖中心，我们就退而求其次，只求测量船逐步往深处开航行，可能航行的路线会迂回点，但总能逐步达到最深点.

下面我们就按这种想法开始航行. 首先测出$P_1(x_1, y_1)$点和它邻近两点$P_x(x_1+\Delta x, y_1)$，$P_y(x_1, y_1+\Delta y)$的函数值，利用这三点的值，近似求出P_1点的梯度向量$\mathrm{grad}f(P_1)$：

$$\left(\frac{f(x_1+\Delta x, y_1)-f(x_1, y_1)}{\Delta x}, \frac{f(x_1, y_1+\Delta y)-f(x_1, y_1)}{\Delta y}\right).$$

在P_1点局部来看，函数沿$-\mathrm{grad}\,f(P_1)$方向下降最快，所以令测量船沿P_1点的负梯度方向往前开，一边开时，一边每隔一定距离(如果等速航行，也就是每隔一定时间)测一次湖的

深度，若后一点测得的深度比前一点测得的深度深，测量船就继续往前开．直到某一点测得的深度比前一点测得的深度浅时，测量船就退回到前一点，设该点为 $P_2(x_2, y_2)$．这样，我们就由 P_1 点前进到了 P_2 点．

然后就可如法泡制，近似求出 P_2 点的梯度向量 $\mathrm{grad}\, f(P_2)$，测量船沿 $-\mathrm{grad}\, f(P_2)$ 方向往前开，再边开边测，一直到沿这个方向上的最底点停下来，设该点为 $P_3(x_3, y_3)$．再沿 $-\mathrm{grad}\, f(P_3)$方向往前开，求出 P_4 点，若干步以后，测量船几乎就在某一点附近转圈．最后按什么标准结束测量呢？可以利用 P_n 点的梯度绝对值充分小（一般不可能等于零），小于事先指定的误差时即可停止，这时把 P_n 点就认为是最低点 $P^*(x^*, y^*)$．或用 $P_n P_{n-1}$ 之间的距离充分小，小于事先指定的误差即可停止，同样把 P_n 认为就是 P^*．由此求出了太湖的最深深度 $f(x^*, y^*)$．

第十节 条件极值

10.1 条件极值的必要条件

在前面讨论的极值问题中，对自变量没有任何约束，它可以在定义域上自由地变化，这种极值问题我们称为*通常极值*．但实际问题中往往对自变量提出一些约束条件，使自变量不能在定义域上自由地变化，而只能在定义域的某一范围内变化，这种极值问题称为*条件极值*．约束条件有*不等式约束*与*等式约束*两种，下面我们只讨论自变量在等式约束条件下求极值的方法．

设给定函数

$$u=f(x, y, z), \tag{10.1}$$

它在空间区域 D 上具有连续偏导数，自变量(x, y, z)受下列条件的限制

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0. \end{cases} \tag{10.2}$$

其中函数 $F_1(x, y, z)$ 与 $F_2(x, y, z)$ 也在 D 上具有连续偏导数。我们的问题就是在约束条件(10.2)之下，求函数 $u=f(x, y, z)$的最大(小)值。

动点(x, y, z)要满足条件(10.2)，从几何上来看，也就是限制动点在曲面 $F_1(x, y, z)=0$ 与曲面 $F_2(x, y, z)=0$ 的交线上变动，问题就变为当动点在交线上变动时，求函数 $u=f(x, y, z)$的最大(小)值。

我们仍讨论极值的必要条件。所谓必要条件，就是说已知 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是交线上的一点，函数 $f(x, y, z)$在 P_0 点的值比交线上任意一点的值都大，问 $P_0(x_0, y_0, z_0)$点坐标应满足什么条件。

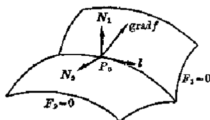


图 1 39

利用几何直观很容易求出(x_0, y_0, z_0)应满足的条件。设曲面 $F_1(x, y, z)=0$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$点的法向量为 $\boldsymbol{N}_1$:

$$\boldsymbol{N}_1=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right),$$

则向量 $\boldsymbol{N}_1$ 与曲面 $F_1=0$ 垂直，当然与两曲面的交线垂直，所以 $\boldsymbol{N}_1$ 与交线在 P_0 点的单位切向量 $\boldsymbol{l}$ 垂直（图 1 39）。又设曲面 $F_2(x, y, z)=0$ 在 P_0 点的法向量为 $\boldsymbol{N}_2$:

$$\boldsymbol{N}_2=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}\right),$$

同理 $\boldsymbol{N}_2$ 也与交线在 P_0 点的单位切向量 $\boldsymbol{l}$ 垂直.

我们假设 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$ 不共线（这也保证两曲面在 P_0 点有交线的条件，所以这假设是自然的，并没有对问题作更多限制），则 $\boldsymbol{N}_1$ 与 $\boldsymbol{N}_2$ 所决定的平面，就是交线在 P_0 点的法平面. 由于 P_0 点是函数 $u=f(x, y, z)$ 在交线上的最大值点，那么函数 u 的梯度向量

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

应该落在法平面上. 如果梯度向量不落在法平面上，则它与向量 $\boldsymbol{l}$ 的夹角或者大于 $90°$，或者小于 $90°$. 假定 P_0 点的梯度向量 $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角小于 $90°$，则根据前节所讲知 $\frac{\partial f}{\partial l}>0$，即知动点 P 从 P_0 出发沿 $\boldsymbol{l}$ 方向上微小移动时，函数 $f(x, y, z)$ 的值增大，再由上节例 3 知，当动点 P 从 P_0 出发沿交线作微小移动时，函数 $f(x, y, z)$ 的值也增加. 这与 P_0 是函数 $f(x, y, z)$ 在交线上的最大值点相矛盾. 由此证明了梯度向量 $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ 必落在由 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$ 决定的法平面上.

既然三个向量共面，则一个向量可以表示成其余两个不共线向量的线性组合，即存在常数 λ_1、λ_2，使

$$\operatorname{grad} f=-\lambda_1\boldsymbol{N}_1-\lambda_2\boldsymbol{N}_2,$$

或

$$\operatorname{grad} f+\lambda_1\boldsymbol{N}_1+\lambda_2\boldsymbol{N}_2=0.$$

写成分量的形式即为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial y}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial z}=0,\end{cases}\qquad(10.3)$$

其中偏导数在 P_0 点取值. 现在 λ_1、λ_2 也是未知数, 由上面三个方程不足以定出 (x_0, y_0, z_0), 但不要忘记 P_0 点还需满足约束条件

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0)=0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0)=0. \end{cases} \tag{10.4}$$

这样共有五个方程, 总可以解出五个未知数 x_0、y_0、z_0、λ_1、λ_2. 条件(10.3)与(10.4)就是条件极值的必要条件.

为了便于记忆, 我们把条件极值的必要条件与通常极值的必要条件统一起来. 为此构造五个变数的函数

$$\Phi(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)=f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2,$$

求这个函数 Φ 的对自变量 $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ 的通常极值的必要条件, 即得方程组(10.3)与(10.4). 这个方法称为拉格朗日乘子法, λ_1、λ_2 称为拉格朗日乘子. 事实上上面的结论不管对几个自变量、几个约束条件(约束条件数目应小于自变量数目)都适用. 例如求函数

$$u=f(x, y, z)$$

在条件 $\quad F(x, y, z)=0$

下的最大(小)值. 先构造函数

$$\Phi(x, y, z, \lambda)=f(x, y, z)+\lambda F(x, y, z),$$

求 Φ 通常极值的必要条件, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial \lambda}=F=0. \end{cases}$$

这就是条件极值的必要条件.

具体求解时,先由必要条件求出若干组解,通过比较函数在各组解上的值,即求出最大值. 若实际问题肯定存在最大值,而方程组又只有一组解,那末这组解就是所求最大值点.

10.2 几个例子

【例 1】 求 n 个正数,其和为 l 的条件下,什么时候其乘积最大.

解: 设 n 个正数为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 问题即求函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1\cdot x_2\cdots x_n,$$

在条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=l$$

下的最大值. 当 $n=3$ 时, 约束条件 $x_1+x_2+x_3=l$, 就是一张平面,而且只考虑它在第一卦限的那部分,这样连同边界构成了一个二维有界闭域. 而函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在其上是连续的,所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在约束条件下的最大值是存在的. 对一般情形也可看出函数在约束条件下的最大值存在.

求最大值点时,先造函数

$$\Phi=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-l),$$

求 Φ 通常极值的必要条件,得

$$\begin{cases}\Phi'_{x_1}=x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0,\\ \Phi'_{x_2}=x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi'_{x_n}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0,\\ \Phi'_{\lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-l=0.\end{cases}\qquad(10.5)$$

由上面前 n 个式子,得出

$$x_1=x_2=\cdots=x_n,$$

把它代入(10.5)最后一式,求出解为

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{l}{n}.$$

现在方程组(10.5)只有一组解，所以得到的解就是最大值点，最大值为

$$f\left(\frac{l}{n}, \frac{l}{n}, \cdots, \frac{l}{n}\right) = \left(\frac{l}{n}\right)^n.$$

利用上题，我们可以得出 n 个正数的几何平均小于算术平均，即

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

为此，记 $l = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，考虑函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ 在条件 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = l$ 下的最大值，由例 1 知

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leqslant f\left(\frac{l}{n}, \frac{l}{n}, \cdots, \frac{l}{n}\right)$$

或

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \leqslant \left(\frac{l}{n}\right)^n,$$

即得

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \leqslant \frac{l}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

这就是所要证明的.

【例 2】 求空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

解：这是一个解析几何的问题，我们现在利用条件极值方法来解，把它变为求函数

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

在条件

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

下的最小值，要求的距离就等于这个最小值的平方根。

构造函数

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda(Ax + By + Cz + D),$$

求 Φ 通常极值的必要条件，得

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2(x-x_0)+\lambda A=0, \\ \Phi'_y=2(y-y_0)+\lambda B=0, \\ \Phi'_z=2(z-z_0)+\lambda C=0, \\ \Phi'_\lambda = Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{10.6}$$

对这个问题，我们先解 λ. 为此将上面前三式分别乘以 A、B、C 后相加，然后再减去 2 乘第四式，得

$$2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)+\lambda(A^2+B^2+C^2)=0,$$

解出 λ 为

$$\lambda=\frac{2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}. \tag{10.7}$$

从问题实际意义来看，最小点一定存在，设为(x_1, y_1, z_1)，它应满足方程(10.6)，即

$$\begin{cases} 2(x_1-x_0)+\lambda A=0, \\ 2(y_1-y_0)+\lambda B=0, \\ 2(z_1-z_0)+\lambda C=0. \end{cases} \tag{10.8}$$

因 λ 已求出，由上式很容易求出最小点 x_1, y_1, z_1. 但事实上我们要的不是 x_1, y_1, z_1 的值，而是求距离

$$d=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

如果能不求 x_1, y_1, z_1 直接求 d，应当尽量避免无谓的计算而直接求出距离 d. 这对此题是可以办到的，只要把(10.8)改写成

$$\begin{cases} x_1-x_0=-\dfrac{\lambda}{2}A, \\ y_1-y_0=-\dfrac{\lambda}{2}B, \\ z_1-z_0=-\dfrac{\lambda}{2}C. \end{cases}$$

然后平方相加得

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=\frac{\lambda^2}{4}(A^2+B^2+C^2),$$

由(10.7)最终得

$$\begin{aligned}d&=\frac{|\lambda|}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\\&=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\right|\sqrt{A^2+B^2+C^2}\\&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

这个结果与解析几何已知结果是一样的.

【例 3】 求二次型

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

在条件 $\qquad x^2+y^2=1$

下的最大值与最小值(A、B、C 为常数).

解：造函数

$$\Phi=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2-1),$$

上式把 λ 写成 $-\lambda$ 没有本质区别，因 λ 本来就是一个变数，无论写成 λ 还是 $-\lambda$ 都代表变数，这样写只是为了以后结果好看些.

求函数 Φ 通常极值的必要条件，得

$$\begin{cases}\Phi'_x=2Ax+2By-2\lambda x=0,\\ \Phi'_y=2Bx+2Cy-2\lambda y=0,\\ \Phi'_\lambda=x^2+y^2-1=0,\end{cases}\qquad(10.9)$$

把上面方程前两式化简，得

$$\begin{cases}(A-\lambda)x+By=0,\\ Bx+(C-\lambda)y=0,\end{cases}\qquad(10.10)$$

因连续函数 $f(x, y)$ 在单位圆周上达到它的最大值与最小值，所以最大点与最小点一定存在，且满足方程组(10.10)．这说明方程组(10.10)有非零解．由代数中知道，齐次线性方程组有非零解时，它的系数行列式必为零，即得

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

这是一个 λ 的二次代数方程，化简得

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+(AC-B^2)=0,$$

解出 λ 为

$$\begin{cases} \lambda_1=\dfrac{A+C+\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}, \\ \lambda_2=\dfrac{A+C-\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}. \end{cases}$$

因 $(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A-C)^2+4B^2\geqslant 0$，所以 λ_1、λ_2 一定是实数，且 $\lambda_1\geqslant\lambda_2$．

对应 λ_1，求(10.9)的解，记为 x_1、y_1，则 x_1、y_1 满足方程组

$$\begin{cases} Ax_1+By_1-\lambda_1x_1=0, \\ Bx_1+Cy_1-\lambda_1y_1=0, \\ x_1^2+y_1^2=1. \end{cases}$$

但我们要的不是 x_1、y_1 的值，而是 $f(x_1, y_1)$ 的值．为此在上面方程组中前两式分别乘以 x_1、y_1 然后相加，并利用第三式得

$$f(x_1, y_1)=Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2=\lambda_1.$$

同理，对应 λ_2，求(10.9)的解，记为 x_2、y_2，则有

$$f(x_2, y_2)=Ax_2^2+2Bx_2y_2+Cy_2^2=\lambda_2.$$

根据问题的实际意义，$f(x, y)$ 在单位圆周上的最大值与

最小值存在，而方程组又只有两组解，所以 λ_1、λ_2 就是二次型 $f(x, y)$ 在单位圆周上的最大值与最小值.

为了下面的需要，我们进一步指出:

1) 当 $A>0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$ 时，有 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2>0$;

2) 当 $A<0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$ 时，有 $\lambda_2 \leqslant \lambda_1<0$;

3) 当 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}<0$ 时，有 $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$.

事实上，当 $A>0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2>0$ 时，必有 $C>0$, 现在我们来估计 λ_2. 因

$$\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}<\sqrt{(A+C)^2}=A+C,$$

所以

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2=\frac{A+C-\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}$$

$$>\frac{A+C-(A+C)}{2}=0;$$

当 $A<0$, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2>0$ 时，必有 $C<0$, 现在我们来估计 λ_1. 因

$$\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}<\sqrt{(A+C)^2}=|A+C|,$$

所以

$$\lambda_2 \leqslant \lambda_1=\frac{A+C+\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}$$

$$<\frac{A+C+|A+C|}{2}=0;$$

当 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2<0$ 时，因

$$\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}>|A+C|,$$

所以

$$\lambda_1=\frac{A+C+\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}$$

$$>\frac{A+C+|A+C|}{2}\geqslant 0,$$

$$\lambda_2=\frac{A+C-\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}$$

$$<\frac{A+C-|A+C|}{2}\leqslant 0.$$

故上面结论成立.

习题二十四

1．求下列函数在所给的条件下的极值.

1) $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $x^2+y^2=1$, $(a>0,\ b>0)$;

2) $z=x^2+y^2$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $(a>0,\ b>0)$;

3) $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, $x-y=\frac{\pi}{4}$;

4) $u=x-2y+2z$, $x^2+y^2+z^2=1$;

5) $u=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

2．求函数 $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在 $x+y=l\ (l>0,\ n\geqslant 1)$ 之下的极值，并证明：当 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\geqslant 1$ 时有

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2}.$$

3．求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$ 在条件 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$ $(x_i>0,\ a>0)$ 之下的极值，并证明：当 $a_i>0\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 时有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}.$$

4. 试求抛物线 $y^2=4x$ 上的点，使它与直线 $x-y+4=0$ 的距离最近.

5. 已知矩形周长为 $2p$，将它绕其一边旋转而构成一立体，求使立体体积为最大的那个矩形.

6. 求圆的外切三角形何时面积最小. [提示：见图 1-40.]

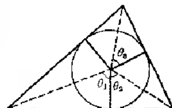


图 1-40

7. 给定平面上 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 三点，求一点 $P(x, y)$，使 P 点与各点距离平方和，即 $PA^2+PB^2+PC^2$ 为最小.

8. 证明：椭圆内接三角形中面积最大的那个三角形，其每个顶点的椭圆法线必与三角形另外两个顶点的联线垂直.

提示：给定三点 (x_i, y_i)，则其面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. 根据上题及对称性考虑，最大面积的内接三角形一边平行于坐标轴，由此求出面积最大的内接三角形.

10. 求函数 $f(x, y)=x^2+y^2$ 在条件 $ax^2+2bxy+cy^2=1$ 之下的极值 (a、b、c 为常数).

11. 求椭圆抛物面 $2az=x^2+y^2$ 与椭圆柱面 $x^2+xy+y^2=a^2$ 交线上点的竖坐标 z 的最大值与最小值.

10.3 通常极值的充分条件

求函数 $z=f(x, y)$

在闭区域 D 上的最大值与最小值时，我们可以先求出方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0, \\ f'_y(x, y)=0, \end{cases} \tag{10.11}$$

在区域 D 上的所有解组. 然后设区域 D 的边界由方程 $g(x, y)=0$ 表示，再求出方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)+\lambda g'_x(x, y)=0, \\ f'_y(x, y)+\lambda g'_y(x, y)=0, \\ g(x, y)=0. \end{cases}$$

的所有解组．只要比较函数 $f(x, y)$ 在这两组解组的值，最大的就是函数在闭域 D 上的最大值，最小的就是函数在闭域 D 上的最小值．

如果要求函数 $f(x, y)$ 在 D 上的极大值与极小值，极值必要条件只给出极值点存在的范围，其它什么也没有告诉我们，象上面比较函数值的办法也行不通了．因此需要讨论极值的充分条件．根据这个条件可判断一点究竟是一极值点还不是极值点，如果是一极值点究竟是极大值点还是极小值点．

下面我们利用泰勒公式及例 3，可以给出极值的充分条件．设 $P_0(x_0, y_0)$ 是方程组(10.11)的解，所以在 P_0 点泰勒展式为

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}k^2\right]+\alpha\rho^2, \quad (10.12)$$

当 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ 时，有 $\alpha\to 0$．记

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},\ B=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y},\ C=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

式子(10.12)可改写成

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\alpha\rho^2.$$

再令 $x=\frac{h}{\rho}$, $y=\frac{k}{\rho}$，则 $x^2+y^2=1$，且上式可写成

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\frac{\rho^2}{2}(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2\alpha),$$

要看$f(x_0, y_0)$是极小、还是极大、还是无极值，就看上式右端当ρ充分小时的值是大于零，还是小于零，还是有正有负．而上式右端括号中的α是趋于零的量，所以右端括号的值取决于二次型．这个二次型在条件$x^2+y^2=1$之下的最大值与最小值已在[例3]作过讨论，于是得到下面结论：

1) 当$A>0$ $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$时，$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$点有极小值；

2) 当$A<0$ $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}>0$时，$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$点有极大值；

3) 当$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}<0$时，$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$点无极值．

事实上，当1)中条件成立时，由[例3]知二次型

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

在条件$x^2+y^2=1$之下的最小值$\lambda_2>0$，且当ρ充分小时，可以使$2|\alpha|<\lambda_2$，所以当ρ充分小时，有

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\geqslant\frac{\rho^2}{2}(\lambda_2+2\alpha)>0 \quad (\rho\neq0),$$

即$f(x_0, y_0)$为一极小值；

当2)中条件成立时，由例3知二次型

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

在条件$x^2+y^2=1$之下的最大值$\lambda_1<0$，且当ρ充分小时，可以使$2|\alpha|<-\lambda_1$，所以当ρ充分小时，有

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\leqslant\frac{\rho^2}{2}(\lambda_1+2\alpha)<0 \quad (\rho\neq0),$$

即$f(x_0, y_0)$为一极大值；

当3)中条件成立时，由例3知二次型

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

在条件 $x^2+y^2=1$ 之下的最大值 $\lambda_1>0$，最小值 $\lambda_2<0$，且当 ρ 充分小时，可以使 $|2\alpha|<\min(\lambda_1, |\lambda_2|)$，所以当 ρ 充分小时，在最大点 $x_1=\frac{h_1}{\rho}$，$y_1=\frac{k_1}{\rho}$ 处，有

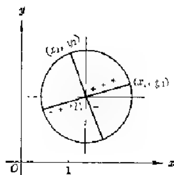


图 1-41

$$f(x_0+h_1, y_0+k_1)-f(x_0, y_0)$$
$$=\frac{\rho^2}{2}(\lambda_1+2\alpha)>0,$$

在最小点 $x_2=\frac{h_2}{\rho}$，$y_2=\frac{k_2}{\rho}$ 处，有

$$f(x_0+h_2, y_0+k_2)-f(x_0, y_0)$$
$$=\frac{\rho^2}{2}(\lambda_2+2\alpha)<0,$$

这表明 $f(x, y)-f(x_0, y_0)$ 在过 P_0 的一条直线上取正值，在过 P_0 的另一条直线上取负值(图1-41)，所以 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 无极值.

当 $AC-B^2=0$ 时，这时需要根据具体问题具体分析它是否有极值，这就要涉及到泰勒展开式的三次项部分.

【例4】 求函数 $f(x, y)=xy(x^2+y^2-1)$ 的极值.

解：因
$$\begin{cases} f'_x=y(3x^2+y^2-1)=0, \\ f'_y=x(x^2+3y^2-1)=0. \end{cases}$$

解上面方程组共得九组解如下：

(1) $x=y=0$;　　(2) $x=0$, $y=1$;

(3) $x=0$, $y=-1$;　　(4) $x=-1$, $y=0$;

(5) $x=1$, $y=0$;　　(6) $x=y=\frac{1}{2}$;

(7) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$;　　(8) $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$;

(9) $x=y=-\frac{1}{2}$.

要判断这些点是否是极值点，我们先求出二阶偏导数

$$A=f''_{xx}=6xy,\ B=f''_{xy}=3x^2+3y^2-1,\ C=f''_{yy}=6xy.$$

然后将九组解代入

$$A \text{ 与 } AC-B^2=(6xy)^2-(3x^2+3y^2-1)^2$$

检验，最好先检验 $AC-B^2$ 的符号，若 $AC-B^2<0$，就不必检验 A 的符号，因

$(AC-B^2)|_{(0,0)}=-1<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点无极值；

$(AC-B^2)|_{(0,1)}=-4<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 点无极值；同样可知 $f(x,y)$ 在 $(0,-1)$，$(-1,0)$，$(1,0)$ 点无极值；

$(AC-B^2)|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=2>0$，$A|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=\frac{3}{2}>0$，所以 $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 点有极小值 $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$；

$(AC-B^2)|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=2>0$，$A|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=-\frac{3}{2}<0$，所以 $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 点有极大值 $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$；

同样可知 $f(x,y)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 点有极大值 $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$；在 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 点有极小值 $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$.

【例5】 求由方程

$$z^2+xyz-x^2-xy^2=9$$

所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解：令 $f(x, y, z)=z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$，

由 $z'_x=-f'_x/f'_z$，$z'_y=-f'_y/f'_z$ 为零时必须分子为零，故得极值必要条件为

$$\begin{cases} f'_x=yz-2x-y^2=0, \\ f'_y=xz-2xy-x(z-2y)=0. \end{cases} \tag{10.12}$$

又 $z=z(x, y)$ 应满足方程

$$f=z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0. \tag{10.13}$$

这样，由上面三个方程可以解出未知数 (x, y, z)．解时分情形讨论．

由(10.12)第二式，得 $x=0$ 及 $z=2y$．

当 $x=0$ 时，代入(10.13)得 $z=\pm 3$，再代入(10.12)第一式得 $y(\pm 3-y)=0$，所以在这种情形下共得四组解：

(1) $x=0,\ y=0,\ z=3$；　　(2) $x=0,\ y=0,\ z=-3$；

(3) $x=0,\ y=3,\ z=3$；　　(4) $x=0,\ y=-3,\ z=-3$．

当 $z=2y$ 时，代入(10.12)中第一式及(10.13)得

$$\begin{cases} y^2-2x=0, \\ 4y^2+xy^2-x^2-9=0. \end{cases}$$

解出 $x=1$，$y=\pm\sqrt{2}$，所以在这种情形下共得两组解：

(5) $x=1,\ y=\sqrt{2},\ z=2\sqrt{2}$；

(6) $x=1,\ y=-\sqrt{2},\ z=-2\sqrt{2}$．

可以证明在上面六组解处，有 $f'_z\neq 0$，根据隐函数存在定理，在这些点处隐函数 $z=z(x, y)$ 是存在的．

为了检验隐函数是否有极值，需要求出 z''_{xx}，z''_{xy}，z''_{yy}．为此先求 z 的一阶偏导数，有

$$\begin{cases} 2zz'_x+yz+xyz'_x-2x-y^2=0, \\ 2zz'_y+xz+xyz'_y-2xy=0. \end{cases}$$

求二阶偏导数时，我们关心的是二阶偏导数在六组解处的值，而在这六组解处有 $z'_x=0$, $z'_y=0$，所以为了书写简单起见，求二阶偏导数时，把含有一阶偏导数项略去不写，得：

$$\begin{cases} 2zz''_{xx}+xyz''_{xx}-2=0, \\ 2zz''_{xy}+z+xyz''_{xy}-2y=0, \\ 2zz''_{yy}+xyz''_{yy}-2x=0, \end{cases}$$

所以
$$A=z''_{xx}=\frac{2}{2z+xy},$$

$$AC-B^2=z''_{xx}\cdot z''_{yy}-z''_{xy}$$

$$=\frac{4x-(2y-z)^2}{(2z+xy)^2}.$$

下面把各组解代入检验.

$(AC-B^2)\big|_{(1),(2),(3),(4)}=-\dfrac{1}{4}<0$，所以隐函数在前四组解处无极值点；

$(AC-B^2)\big|_{(5),(6)}=\dfrac{2}{25}>0$，$A\big|_{(5)}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}>0$，$A\big|_{(6)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{5}<0$，所以方程在 $x=1$, $y=\sqrt{2}$，$z=2\sqrt{2}$ 点确定的隐函数，在 $(1,\sqrt{2})$ 点有极小值 $z=2\sqrt{2}$；方程在 $x=1$, $y=-\sqrt{2}$，$z=-2\sqrt{2}$ 点确定的隐函数在 $(1,-\sqrt{2})$ 点有极大值 $z=-2\sqrt{2}$.

习题二十五

1．求下列函数的极值：

1) $z=x^2-(y-1)^2$；

2) $z=x^2-xy+y^2-2x-y$；

3) $z=x^3+y^3-3xy$；

4) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$；

5) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$;

6) $z=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y-\operatorname{tg}(x+y)$;

7) $z=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$;

8) $z=x+y+4\sin x\cdot\sin y$.

2 求下列隐函数的极值

1) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$;

2) $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

第一章小结

1．讲了二元函数、极限、连续的定义，同时指出了它们与一元函数时的区别．相应于一元的复合函数与反函数，讲了二元的复合函数与变换．

2．微分、偏导数、方向导数、梯度，都是用来刻划函数在一点邻域处的变化．方向导数与梯度的定义虽不要求可微，但用时总假设函数是可微的．微分是一数量，偏导数与方向导数也是数量，但它们与方向有关．梯度为一向量．

3．多元函数的微分法，主要是掌握复合函数的求导．高阶导数、隐函数求导可以归结为复合函数求导．

4．多元函数的应用讲了四个方面．几何方面有求切平面、法线、切线、法平面、包络线；极值方面有通常极值、条件极值、最速下降法；近似计算方面有泰勒公式；解偏微分方程方面有变量替换法．

第二章

重积分

有了定积分，可以求一般平面图形的面积，旋转体的体积、侧面积，均匀薄片的质量、重心、转动惯量等．解决上面所提出的问题，定积分这个工具是有效的．而要解决象一般立体的体积，变密度薄片的质量、重心、转动惯量，及变密度物体质量、重心、转动惯量等问题，单用定积分的概念就不够了．这些问题在实践中是经常会遇到的，因此，为了解决实际问题，有必要把定积分概念加以推广，建立二重积分和三重积分的概念，并讨论其计算方法．

第一节　二重积分概念和性质

1.1 二重积分概念

【例 1】 求曲顶柱体的体积．

现在的建筑大多可以看成是一平顶柱体，而我国的古代建筑，特别象亭子，就是一种曲顶柱体．我们讨论一般的曲顶柱体．它的底是 xOy 平面上的闭区域 D，它的侧面是以 D 的边界曲线为准线、以平行于 z 轴的直线为母线的柱面，也就是把 D 的边界曲线垂直地向上移动所得的柱面，它的顶是曲面 $z=f(x,y)$（图 2-1）．并设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $f(x,y)\geqslant 0$．我们的问题就是要求这个曲顶柱体的体积 V．

我们知道平顶柱体的高是不变的，它的体积可用公式：

体积＝高×底面积

来计算．但曲顶柱体的高，也就是曲顶的竖坐标 $z=f(x, y)$ 是变化的，因此它的体积 V 不能按上述公式来计算．若以平顶柱体体积的计算方法为基础，来解决曲顶柱体的体积问题，就会遇到高度发生变化的困难．怎么解决这一矛盾呢？我们回忆一下在求曲边梯形面积时，也曾遇到过这类矛盾．当时我们是分两步解决的：先是在局部上用"以直代曲"的方法得到曲边梯形的近似值；然后通过取极限，由近似值得到准确值．我们仍采用这一种思考问题的方式来解决上述求曲顶柱体的体积时高度是发生变化的矛盾．

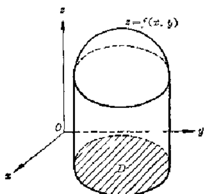


图 2 1

具体来说，先把区域 D 分割成 n 个小区域，记为：$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，同时也用这些记号表示小区域的面积．以每个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的边界线为准线、以平行于 z 轴的直线为母线作柱面，这样就把给定的曲顶柱体分割成 n 个细长的小曲顶柱体．由于曲顶的高度 $z=f(x, y)$ 是连续变化的，在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 上，各点处高度变化不大，可以近似地认为是细长的平顶柱体．并在 $\Delta\sigma_i$ 中任意取一点 (ξ_i, η_i)，把这点的高度 $f(\xi_i, \eta_i)$ 认为就是这个小平顶柱体的高度(图 2 2)．这样，我们就可用 n 个细长平顶柱

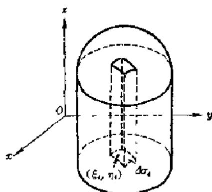


图 2 2

体体积的总和，近似代替曲顶柱体的体积 V，即

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

当小区域的个数 n 越大，且每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 的图形越来越小时，上式的近似程度就越高．但只要小区域的个数是有限个，上式总是近似的．这就遇到近似与准确的矛盾，要解决这个矛盾就要取极限．需要注意的是，不能对所有小区域面积 $\Delta\sigma_i\to0$ 来取极限，因为例如我们可以取一小区域 $\Delta\sigma_i$ 是以固定常数为底、以 h 为高的矩形，当 $h\to0$ 时，这一小区域的面积 $\Delta\sigma_i$ 是趋于零，但不能保证小区域 $\Delta\sigma_i$ 收缩成一点，因而不能保证 $\Delta\sigma_i$ 上的函数值的变化很小，也就不能把小曲顶柱体近似看成平顶柱体．为了使每个小曲顶柱体无限地近似于平顶柱体，不仅要求小区域的个数 n 无限增多，而且要求每个小区域都无限地缩向于一点（图 2-3）．用记号 $\|\Delta\sigma\|\to0$ 表示所有小区域都无限缩向一点．通过对 $\|\Delta\sigma\|\to0$ 取极限，就得到曲顶柱体体积 V 的准确值．

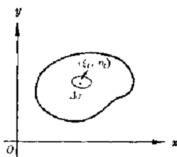


图 2-3

$$V=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

【例 2】 求平面薄片的质量．

如切菜用的薄刀，刀背处厚，刀刃处薄，它可以看成是密度不均匀的平面薄片．一般设有一平面薄片，它占有 xOy 平面上的闭区域 D，在 D 的每点 $(x,\ y)$ 处的面密度为 $\rho(x,\ y)$，其中 $\rho(x,\ y)$ 是 D 上的连续正值函数．我们的问题就是要求

该平面薄片的质量 M.

如果平面薄片的面密度为常量时，那末薄片的质量可以用公式

$$\text{质量}=\text{面密度}\times\text{面积}$$

来计算. 现在薄片的面密度不是常量，而是变化的. 为此把区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$，这些记号同时也表示小区域的面积. 由于面密度 $\rho(x, y)$ 的连续性，当每一个 $\Delta\sigma_i$ 的图形充分小时，$\Delta\sigma_i$ 上的面密度可以近似看成不变，并在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，用这点的面密度 $\rho(\xi_i, \eta_i)$ 代替小区域 $\Delta\sigma_i$ 上各点的面密度，这样就得到所求薄片质量的近似值：

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

为了得到 M 的准确值，可令上述小区域的个数 n 无限增多，而且每个小区域无限缩向一点，最后得出所求薄片的质量：

$$M=\lim_{|\Delta\sigma|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

上面我们分析了曲顶柱体的体积，和平面薄片的质量两个问题，虽然它们的实际意义不同，但计算这些量时所遇到的困难、解决这些困难的方法是相同的，且最后表达这些量的数学表达式也是有相当多的共同之处，即都是求项数无限增加，而每一项无限变小时的这种和式的极限. 因此，可以从这类问题中抽象出它们的共同数学本质，得到二重积分的定义.

定义 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上定义，把 D 任意分成几个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$（这些记号同时也表示小区域的面积），在小区域 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i)(i=1, 2,$

$\cdots, n$)，若极限

$$\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0} \sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

存在，则称极限值为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分（这里 $\|\Delta\sigma\|\to 0$ 表示所有小区域都缩向一点），记作

$$\iint_D f(x, y)d\sigma.$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数，D 叫做积分区域，x、y 叫做积分变量，$d\sigma$ 叫做面积元素。

有了重积分的定义，我们可以说曲顶柱体的体积，等于曲顶竖坐标函数在其底面上的二重积分，即

$$V=\iint_D f(x, y)d\sigma;$$

平面薄片的质量等于面密度函数在其所占区域上的二重积分，即

$$M=\iint_D \rho(x, y)d\sigma.$$

若 $f(x, y)\geqslant 0$，那末二重积分的几何意义就是曲顶柱体的体积；若 $f(x, y)\leqslant 0$，积分

$$\iint_D f(x, y)d\sigma,$$

在数值上与倒置着的曲顶柱体的体积差一负号，所以确切地说，二重积分表示的是展布在 xOy 平面上、下立体的上、下体积的代数和。

特别地，在有界闭域 D 上 $f(x, y)=1$，并且 D 的面积为 σ，由二重积分定义直接可得

$$\iint_D d\sigma=\sigma.$$

这就是说，二重积分 $\iint\limits_D d\sigma$ 在数值上等于闭区域 D 的面积.

当积分存在时，常常可以采用特殊的方法来分割区域 D. 如用平行于坐标轴的、且等距的直线网来分割区域 D，把 D 分成许多小区域. 这些小区域可以分为两类：一类完全在 D 内，其形状为大小相同的小矩形；另一类位在 D 的边界处，其形状为小矩形的碎片. 当取极限时，后一类小区域的面积总和趋于零，所以要不要它们对最后极限值不起影响（图 2-4）. 我们只需考虑完全在 D 内的矩形小区域 $\Delta\sigma_i$，设其个数为 $n=n(\Delta x, \Delta y)$，Δx、Δy 为小矩形的两边长. 由于

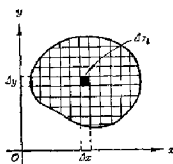


图 2-4

$$\Delta\sigma_i=\Delta x\cdot\Delta y,$$

于是

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x\Delta y$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x\Delta y.$$

后者极限值也常记成 $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$. 反之，如果对区域 D 的特殊分割、任意取点，当 $|\Delta\sigma|\to 0$ 时积分和的极限存在，那末对于 D 的任意分割、任意取点 (ξ_i, η_i)，当 $|\Delta\sigma|\to 0$ 时积分和的极限也存在（由于准备知识不够，证明从略），所以有

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy.$$

1.2 二重积分性质

上面我们说到，如果$f(x, y)$在有界闭区域D上定义，对D的任意分割、点(ξ_i, η_i)的任意取法，若极限

$$\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

存在，则称函数$f(x, y)$在闭域D上可积．究竟什么样函数在D上是可积的呢？首先我们注意到，如果$f(x, y)$在闭域D上可积（其积分值为I），那末函数一定是有界的．否则不管在什么样分割下，函数总在一个小区域$\Delta\sigma_j$上无界．由于点(ξ_j, η_j)可以随心所欲地取，我们总可以先取定$i\neq j$的项，然后取函数值$f(\xi_j, \eta_j)$充分大，使得积分和

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i\right|$$

充分大，而这与和式的极限为I矛盾．所以可积函数一定有界．反之，有界函数不一定可积，要$f(x, y)$可积，必须对函数加更强的条件．这里我们指出两种常见的可积情形．一是$f(x, y)$在闭域D上二元连续，那末它是可积的（以后我们遇到的函数多是这种情形）；二是$f(x, y)$在闭域D上除去有限条线及有限个点外连续，并在D上有界，那末它也是可积的．如函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

它在原点不连续，但有界，所以函数在任一包含原点的闭域D上可积．又如函数

$$f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

它的值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，即函数有界，并在除去正$x$轴后的平面上连续，所以函数在任一不包含原点的闭域$D$上可积. 又如函数$\frac{1}{x^2+y^2}$在原点外连续，但在原点处无界，这个函数在任一包含原点的区域D上是不可积的.

对闭域D上可积函数$f(x, y)$、$g(x, y)$有下列性质：

1) $\iint\limits_D kf(x, y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$　(k为常数)；

2) $$\iint\limits_D [f(x, y)\pm g(x, y)]d\sigma$$
$$=\iint\limits_D f(x, y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x, y)d\sigma;$$

3) 设D由D_1, D_2组成，且D_1、D_2除边界外无公共点（图2-5），则有

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)d\sigma;$$

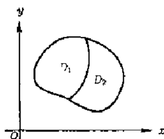


图 2-5

4) 设在D上有$f(x, y)\leqslant g(x, y)$，则 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x, y)d\sigma$；

5) 设$f(x, y)$在闭域D上连续，则在D上总存在一点(ξ, η)，使得

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\cdot\sigma,$$

其中σ为闭域D的面积. 这一性质称为积分中值定理.

下面我们只证性质5).

【证明】 因$f(x, y)$在有界闭域D上连续，根据有界闭域上连续函数取到最大值，最小值定理，在D上总存在一点(x_1, y_1)，使$f(x_1, y_1)$等于最大值M，又存在一点(x_2, y_2)，使$f(x_2, y_2)$等于最小值m．那末对于D上所有的点(x, y)，有

$$m=f(x_2, y_2)\leqslant f(x, y)\leqslant f(x_1, y_1)=M.$$

由上述性质4)可得

$$\iint_D m d\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant\iint_D M d\sigma,$$

再由上述性质1)，并记区域D的面积为σ，得到

$$m\cdot\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma\leqslant M\cdot\sigma,$$

或
$$m\leqslant\iint_D f(x, y)d\sigma/\sigma\leqslant M.$$

根据连续函数取中间值定理，知D上必存在一点(ξ, η)，使

$$\iint_D f(x, y)d\sigma/\sigma=f(\xi, \eta),$$

即
$$\iint_D f(x, y)d\sigma=f(\xi, \eta)\cdot\sigma. \quad \blacksquare$$

这性质说明，当曲顶柱体竖坐标连续变化时，曲顶柱体的体积，等于以某一竖坐标为高的同底平顶柱体的体积．$f(\xi, \eta)$就称为$f(x, y)$在D上的平均高度．

习 题 一

1．设$f(x, y)$，$g(x, y)$在闭域D上可积，且

$$f(x, y)\leqslant g(x, y),$$

试从定义出发证明：

$$\iint_D f(x, y)d\sigma \leqslant \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

2. 设 $f(x, y)$ 在闭域 D 上连续，证明：

$$\left|\iint_D f(x, y)d\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|d\sigma.$$

3. 设 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 在闭域 D 上连续，且 $g(x, y)$ 在 D 上不改变符号，证明：在 D 上总可找到一点 (ξ, η)，使

$$\iint_D f(x, y)\cdot g(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\iint_D g(x, y)d\sigma.$$

4. 根据二重积分的几何意义，说明下列积分值是大于零，还是小于零，还是等于零

1) $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}} (1+x)d\sigma$;　　2) $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}} (x-1)d\sigma$;

3) $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leqslant 1\\|y|\leqslant 1}} x\,d\sigma$;　　4) $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} x\,d\sigma$;

5) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} x\,d\sigma$;　　6) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} x^2\,d\sigma$;

7) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} xy\,d\sigma$;　　8) $\displaystyle\iint_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} y\,d\sigma$.

第二节　二重积分的计算

本节将根据二重积分的几何意义，来说明二重积分的计算方法。它把算一个二重积分问题，化为接连算两个定积分问题。

2.1 利用直角坐标系计算二重积分

下面先讨论连续函数 $f(x, y)\geqslant 0$ 时，二重积分的计算问题。

设积分区域 D 是由两条平行直线 $x=a$、$x=b$，及两条连续曲线 $y=\varphi_1(x)$、$y=\varphi_2(x)$（在 $[a, b]$ 上 $\varphi_2(x)\geqslant\varphi_1(x)$）所围成，就是说，区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x) \quad 与 \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

来表示（图 2-6）。

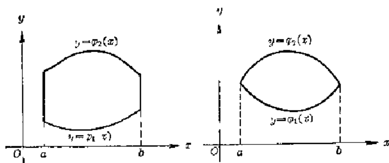


图 2-6

按照二重积分的几何意义，$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底、以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积．下面我们用"切片法"来求曲顶柱体的体积．

作于 yOz 坐标面平行的平面 $x=x_0$，这平面与曲顶柱体相交所得的截面，是一个以区间 $[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$ 为底、以 $z=f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形（图 2-7 中阴影部分）．所以这截面的面积为

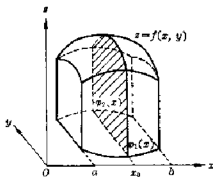


图 2-7

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

一般地，过区间$[a, b]$上任一点x，且平行于yOz坐标面的平面，与曲顶柱体相交所得截面的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

上式中y是积分变量，x在积分时保持不变．对于区间$[a, b]$上每一个x，都有截面积$A(x)$与之对应，根据函数概念，$A(x)$是x的函数，而且可以证明，当$f(x, y)$、$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$都连续时，函数$A(x)$也是x的连续函数．

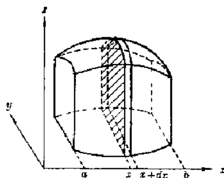


图 2-8

现在用平行于yOz面的平面，把曲顶柱体切割成许多薄片．任取一个位于x与$x+dx$之间的薄片(图2-8)，这个薄片的厚度为dx，而且当dx充分小时，这薄片可以看成以截面$A(x)$为底，高为dx的薄柱体，薄片体积近似为

$$dV=A(x)dx,$$

所以曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx.$$

即得重积分计算公式

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx,$$

或

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (2.1)$$

上式右端是一个先对y、后对x的累次积分．求内层积

分时，把 x 看作常数而 y 是积分变量，而积分上、下限可以依赖于 x，积分的结果是 x 的函数，然后再对 x 求外层积分，这时积分上、下限一定为常数。

上述公式也可以形象地来理解．要完成二重积分，就要使积分变量既不重复、也不遗漏地跑遍整个区域 D．一种简单的办法是：先让积分变量跑过一条线，然后让线变，积分变量就扫过一个面．具体来说，对于 $[a, b]$ 内的任一个 x 值，相应地有纵坐标从 $y=\varphi_1(x)$ 到 $y=\varphi_2(x)$ 的一段线段与之对应(图2-9)，内层积分表示对 $f(x, y)$ 完成了在这线段上的积分；当 x 从 a 变到 b 时，这变动线段就扫过区域 D，所以累次积分就表示对 $f(x, y)$ 完成了在 D 上的二重积分．

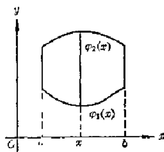


图 2-9

类似可以说明，如果区域 D 是由两条平行直线 $y=c$, $y=d$ 及两条连续曲线 $x=\psi_1(y)$、$x=\psi_2(y)$（在区间 $[c, d]$ 上 $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$）所围成，也就是说，区域 D 可以用不等式

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y) \quad 与 \quad c\leqslant y\leqslant d$$

来表示（图2-10）．那末

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x, y)dx\right]dy,$$

或

$$\iint_D f(x, y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x, y)dx. \qquad (2.2)$$

上面我们讨论了被积函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续、且不取负值情形．如果 $f(x, y)$ 只在 D 上连续，总可以化为已讨论

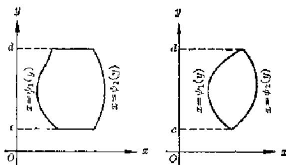


图 2 10

过的情形．事实上我们把$f(x, y)$改写成

$$f(x, y)=\frac{|f(x, y)|+f(x, y)}{2}-\frac{|f(x, y)|-f(x, y)}{2},$$

令

$$f_1(x, y)=\frac{|f(x, y)|+f(x, y)}{2},$$

$$f_2(x, y)=\frac{|f(x, y)|-f(x, y)}{2},$$

则函数$f_1(x, y)$，$f_2(x, y)$在区域D上连续、且不取负值．由重积分性质2）得

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\iint\limits_D f_1(x, y)d\sigma-\iint\limits_D f_2(x, y)d\sigma.$$

这样就把任一连续函数的重积分，化为两个连续、且不取负值函数的重积分之差．而对函数$f_1(x, y)$，$f_2(x, y)$的重积分可化为累次积分，因此对函数$f(x, y)$的重积分也可化为累次积分．仿此，以后我们有理由先对非负函数进行讨论．

若函数$f(x, y)$，在D上有一些间断线与间断点时，上面化累次积分的公式仍成立．因为这时它的几何意义并没有改变，如果说原来曲顶柱体的形状象一个光滑的山头，那末现在曲顶柱体的形状就象充满梯田的山头，用切片法求体积

仍保持有效.

【例 1】 计算积分 $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}d\sigma$, 其中 D 是

$$1\leqslant x\leqslant 2 \quad 与 \quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

解法一: 先画出区域 D(图 2-11). 我们看到 D 在 x 轴上的投影是区间 $[1, 2]$, 对于该区间内任一 x, 相应地有纵坐标从 $y=0$ 到 $y=1$ 的一条线段与之对应, 因此由公式(2.1)得

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{x^2dy}{1+y^2}=\int_1^2 [x^2\operatorname{arc\,tg} y]_0^1 dx$$

$$=\int_1^2 \frac{\pi}{4}x^2dx=\frac{7}{12}\pi.$$

解法二: 区域 D 在 y 轴上的投影是区间 $[0, 1]$, 对于该区间内的任一 y, 相应地有横坐标从 $x=1$ 到 $x=2$ 的一条线段与之对应(图 2-12), 因此由公式(2.2)得

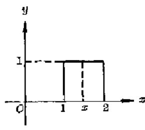


图 2-11

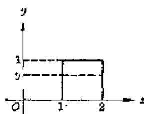


图 2-12

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_1^2 \frac{x^2dx}{1+y^2}=\frac{7}{3}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}=\frac{7}{12}\pi.$$

由这例可以看出, 当积分区域是一矩形, 被积函数可以分离成只含 x 的函数和只含 y 的函数相乘时, 二重积分可以看作两个定积分相乘, 即

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} f(x)g(y)dx\,dy=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy.$$

事实上应用公式(2.1)得

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} f(x)g(y)dx\,dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x)g(y)dy\right]dx,$$

上式右端对 y 求积时，把 x 看成常数，因此可以将 $f(x)$ 提到内层积分号之外，变为

$$\int_a^b\left[f(x)\cdot\int_c^d g(y)dy\right]dx,$$

而定积分 $\int_c^d g(y)dy$ 为一常数，又可将它提到外层积分号之外，即得

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} f(x)g(y)dx\,dy=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_c^d g(y)dy.$$

【例 2】 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2-y^2}\,d\sigma$，其中区域 D 是

$$0\leqslant x\leqslant 1 \quad 与 \quad 0\leqslant y\leqslant x.$$

解法一：先画出区域 D，并标出边界的方程和两条边界线交点的坐标(图 2-13)．区域 D 在 x 轴上的投影为区间[0, 1]，对于该区间内的任一 x，相应地有纵坐标从 $y=0$ 到 $y=x$ 的

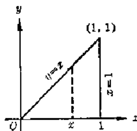


图 2-13

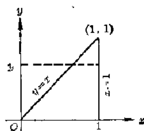


图 2-14

一条线段与之对应. 因此由公式(2.1)得

$$\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{x^2-y^2}+x^2\arcsin\frac{y}{x}\right)\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1\frac{\pi}{4}x^2dx=\frac{\pi}{12}.$$

解法二: 区域 D 在 y 轴上的投影是区间[0, 1], 对于该区间内的任一 y, 相应地有横坐标从 $x=y$ 到 $x=1$ 的一条线段与之对应(图 2-14). 因此由公式(2.2)得

$$\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 \sqrt{x^2-y^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-y^2}-y^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)\right)\right]_y^1 dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\sqrt{1-y^2}-y^2\ln\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)+y^2\ln y\right]dy=\frac{\pi}{12}.$$

这例说明了, 把二重积分化为累次积分时, 究竟是先对 y 后对 x 积分, 还是先对 x 后对 y 积分却大有讲究. 有些题这两种次序的难易程度差别不大, 有些题这两种次序的难易程度可以相差很大, 甚至对一种次序积分可以"积出来", 而对另一种次序积分却"积不出来". 所以每个题都要根据区域 D 和被积函数的特点进行具体分析, 也可先作一番侦察工作和粗算, 然后决定选取那一个次序进行具体详细的积分.

【例 3】 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,d\sigma$, 其中 D 是由直线 $x=2$, $y=2$ 及双曲线 $xy=1$ 围成的区域.

解法一: 先画出区域 D, 并标出边界的方程和两条边界线交点的坐标. D 在 x 轴上的投影是区间[1, 2], 对于该区间

内的任一x,相应地有纵坐标从$y=\frac{1}{x}$到$y=x$的一条线段与之对应(图2-15),因此由公式(2.1)得

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx$$

$$=\int_1^2(-x+x^3)\,dx=\frac{9}{4}.$$

解法二:D在y轴上的投影是区间$\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$,对于该区间内的任一$y$,考察横坐标变化是一条什么样线段时,发现对于区间$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$内的$y$,与区间$[1,\ 2]$内的$y$情况是不同的. 为此我们用直线$y=1$把区域$D$分成两个区域$D_1$与$D_2$(图2-16).

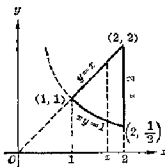


图 2-15

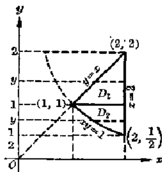


图 2-16

对于区间$[1,\ 2]$内的任一y,相应地有横坐标从$x=y$到$x=2$的一条线段与之对应;

对于区间$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$内的任一$y$,相应地有横坐标从$x=\frac{1}{y}$到$x=2$的一条线段与之对应. 所以

$$\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D_1}\frac{x^2}{y^2}\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}\frac{x^2}{y^2}\,d\sigma$$

$$=\int_1^2 dy\int_y^2\frac{x^2}{y^2}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2\frac{x^2}{y^2}\,dx=\frac{9}{4}.$$

这例说明求二重积分时，若积分区域 D 的边界是分段函数，或 D 不属于图 2-6 或图 2-10 所示类型时，总可以用平行于 x 轴或 y 轴的直线把 D 分成若干个子区域，使每个子区域都属于上述类型区域，D 上积分就化为每个子区域上的积分。

【例 4】 计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)d\sigma$，其中 D 为抛物线 $y=x^2$、$y=4x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的区域。

解法一：先画出区域 D，并标出边界曲线方程和两条边界曲线交点的坐标（图 2-17）。计算前我们先来考察一下区域 D 和被积函数的特性。由图看出 D 关于 y 轴是对称的，函数 x 是奇函数，所以有

$$\iint\limits_{D}(x+y)d\sigma=\iint\limits_{D}x\,d\sigma+\iint\limits_{D}y\,d\sigma=\iint\limits_{D}y\,d\sigma.$$

再由函数 y 是偶函数，并记 D 在 $x>0$ 部分为 D_0，则有

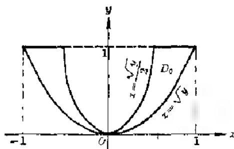


图 2-17

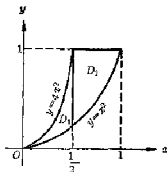


图 2-18

$$\iint_D (x+y)d\sigma = \iint_D y d\sigma = 2\iint_{D_0} y d\sigma = 2\int_0^1 dy \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} y dx$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{y}\,dy = \frac{2}{5}.$$

解法二：若先对 y 积后对 x 积时，需要作辅助线 $x=\frac{1}{2}$，把区域 D_0 分成 D_1 和 D_2（图 2-18）．所以有

$$\iint_D (x+y)d\sigma = 2\iint_{D_0} y d\sigma = 2\iint_{D_1} y d\sigma + 2\iint_{D_2} y d\sigma$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^{4x^2} y\,dy + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^1 y\,dy$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{15}{2} x^4 dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^4)dx = \frac{2}{5}.$$

这例说明做题时，先要考察区域和被积函数有无对称性，有的一看就知道积分为零，有的可使积分化简．否则的话，就会把时间花在无谓的计算上，不仅是"得不偿失"，往往是有失无得．

【例 5】 求两个半径相等其轴垂直相交的圆柱面所围成的立体的体积．

解：设圆柱面的半径为 R，且这两个圆柱面的方程分别为：

$$x^2+z^2=R^2,\quad x^2+y^2=R^2.$$

利用所求立体关于坐标面的对称性，只要算出它在第一卦限部分（图 2-19）的体积 V_1，然后乘以 8 就行了．

所求立体在第一卦限部分，可以看成是一个曲顶柱体，它的底是 xOy 面上四分之一的圆 D：$0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$ 与 $0\leqslant x\leqslant R$（图 2-20）；它的顶是柱面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$，所以

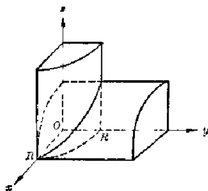


图 2-19

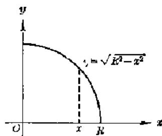


图 2-20

$$V_1=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot y\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{2}{3}R^3.$$

从而得到所求立体的体积为

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3.$$

读者也可以把 $x=\sqrt{R^2-z^2}$ 看成曲顶柱体的顶，把 D: $0\leqslant y\leqslant R$ 与 $0\leqslant z\leqslant y$ 看成曲顶柱体的底，先求出该曲顶柱体的体积，再乘以 16 也可得出所求立体的体积.

【例 6】 求由曲面 $z=xy$、$x+y+z=1$ 及坐标面 xOz, yOz 所围成的立体的体积.

解：所求立体是位于空间第一卦限中的平面 $x+y+z=1$ 与双曲面 $z=xy$ 上下合围而成（图 2-21）。该立体在 xOy 面上的投影为区域 D. D 的两条边界是 x 轴和 y 轴，第三条边界线是由上述两个曲面的交线

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\z=xy,\end{cases}$$

在 xOy 平面上的投影曲线，所以第三条边界曲线可以从上两方程中消去 z 而得到，即为(图 2-22)

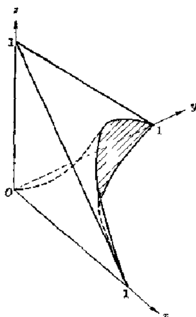


图 2-21

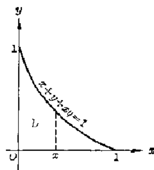


图 2-22

$$x+y+xy=1.$$

由于立体体积 V 可以看成两个曲顶柱体体积之差，一个是以 $z=1-x-y$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体；一个是以 $z=xy$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体. 所以立体体积 V 为：

$$V=\iint\limits_{D}(1-x-y)\,d\sigma-\iint\limits_{D}xy\,d\sigma=\iint\limits_{D}(1-x-y-xy)\,d\sigma$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}}(1-x-y-xy)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx=2\ln 2-\frac{5}{4}.$$

最后，我们总结一下重积分与累次积分的关系. 由公式

(2.1)与(2.2)看出，若$f(x, y)$可积，即$f(x, y)$满足我们所说的可积条件，那么它的两个累次积分也存在，而且相等．反之，若函数的两个累次积分存在，不能保证函数的重积分存在．考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & x>0 \text{ 与 } y>0, \\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0, \end{cases}$$

在区域D: $0\leqslant x\leqslant 1$与$0\leqslant y\leqslant 1$上的情况．先任意固定x．若$x\neq 0$，注意到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

有 $$\int_0^1 f(x, y)dy=\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_0^1=\frac{1}{1+x^2}.$$

若$x=0$时，$$\int_0^1 f(0, y)dy=\int_0^1 0\cdot dy=0.$$

因函数在一点的值对定积分不起影响，所以当$0\leqslant x\leqslant 1$时，有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)dy=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

同理，由 $$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

可得 $$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)dx=-\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

函数$f(x, y)$的两个累次积分不相等，因此函数的重积分一定不存在，否则与上述结论矛盾．

2.2 偏导数与次序无关定理

在讲多元函数微分时，我们提到只要混合偏导数$f''_{xy}(x, y)$与$f''_{yx}(x, y)$在区域D上连续，则它们必相等：

$$f''_{xy}(x, y)\equiv f''_{yx}(x, y).$$

现在，我们利用重积分的计算来证明这一定理. 用反证法，假设两个混合偏导数在 D 上不恒等，则它们必在区域 D 中一点 $P_0(x_0, y_0)$ 不等，

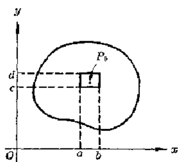


图 2-23

$$f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0).$$

无妨设它们的差大于零，并记为 ε：

$$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{yx}(x_0, y_0) = \varepsilon > 0.$$

由于两个混合偏导数在 P_0 点连续，所以总可以找出以 P_0 为中心，且完全包含在 D 内的小矩形 Δ(图 2-23)：

$$a \leqslant x \leqslant b \quad 与 \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

使得在 Δ 上有

$$f''_{xy}(x, y) - f''_{yx}(x, y) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

利用重积分性质 4) 和 2) 可得：

$$\iint\limits_{\Delta} f''_{xy}(x, y)d\sigma - \iint\limits_{\Delta} f''_{yx}(x, y)d\sigma \geqslant \iint\limits_{\Delta} \frac{\varepsilon}{2}\, d\sigma$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}(b-a)(d-c). \tag{2.3}$$

而由重积分计算公式(2.1)知

$$\iint\limits_{\Delta} f''_{xy}(x, y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f''_{xy}(x, y)dy = \int_a^b [f'_x(x, y)]_c^d dx$$

$$= \int_a^b [f'_x(x, d) - f'_x(x, c)]dx = [f(x, d) - f(x, c)]_a^b$$

$$= f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$

又由公式(2.2)知

$$\iint\limits_{\Delta} f''_{yx}(x, y)d\sigma = f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c).$$

把所得的结果代入公式(2.3)得

$$0 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}(b-a)(d-c) > 0.$$

这矛盾说明反证法假设不对，即两个混合偏导数在区域 D 上恒等.

习 题 二

1. 计算下列二重积分:

1) $\iint\limits_{D}(x+y)^2 dx\,dy$, D: $0 \leqslant x \leqslant 2$ 与 $0 \leqslant y \leqslant 2$;

2) $\iint\limits_{D} e^{x+y} dx\,dy$, D: $0 \leqslant x \leqslant a$ 与 $0 \leqslant y \leqslant a$, $(a>0)$;

3) $\iint\limits_{D} xy(x+y)dx\,dy$, D: $0 \leqslant x \leqslant a$ 与 $0 \leqslant y \leqslant b$, $(a, b>0)$;

4) $\iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{1+x+y}$, D: $0 \leqslant x \leqslant 1$ 与 $0 \leqslant y \leqslant 1$.

2. 改变下列各题的积分顺序:

1) $\int_0^a dx\int_0^x f(x, y)dy \quad (a>0)$;

2) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x, y)dy$;

3) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)dx$;

4) $\int_{-1} dx\int_{x^2+x}^{x+1} f(x, y)dy$.

3. 计算下列二重积分:

1) $\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy$, D: 由 $y=x+a$, $y=\frac{x}{2}$, $x=0$, $x=a$ 直线所围成的区域;

2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy$，$D$：由 $y=x^2$，$y=0$，$x+y=2$ 所围成的区域；

3) $\iint\limits_D \sqrt{xy-x^2}\,dx\,dy$，$D$：由 $y=x$，$y=2x$，$x=1$ 所围成的区域；

4) $\iint\limits_D y\,dx\,dy$，D：$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leqslant 1$ $(a, b>0)$；

5) $\iint\limits_D 3x^2y^2dx\,dy$，$D$：由 $y=1-x^2$，$x=0$，$y=0$ 所围成的区域。

4．求下列各题中两曲线所围成的面积：

1) $xy=a^2$，$x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$；

2) $y^2=2px+p^2$，$y^2=-2qx+q^2$ $(p, q>0)$。

5．求下列曲面所围立体的体积

1) $z=1+x+y$，$z=0$，$x+y=1$，$x=0$，$y=0$；

2) $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$。

2.3 利用极坐标系计算二重积分

计算定积分时，求积的困难在于被积函数，定积分中换元法的好处就是可把被积函数的形状进行转化，从而便于用基本求积公式．计算重积分时，求积的困难除被积函数原因外，还由于积分区域的多样性，有时积分区域往往成为困难的主要方面．为此，针对不同形状的区域，要讨论重积分的各种不同算法．当区域的边界由圆弧、射线组成时，用极坐标系来计算就比较简单．

在直角坐标系中求曲顶柱体体积时，我们用平行于 x 轴和 y 轴的两族直线：$x=$ 常数和 $y=$ 常数，把区域 D 分割成 n 个小区域．与此类似，在极坐标系中求曲顶柱体体积时，我们用以极点为中心的一族同心圆：$r=$ 常数，和自极点出发的一族射线：$\theta=$ 常数，把区域 D 分割成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$（在边界上的小区域略去不计）先求出每一个小区域

$\Delta\sigma_i$ 上曲顶柱体的近似值，进而求出 D 上曲顶柱体的近似值，再取极限即得曲顶柱体的准确值(图2 24)．如果每次都是这么讨论，一来显得噜嗦，没有必要为此浪费时间，二来记号方面会引起很大麻烦，因为对 r 与 θ 各自要引进一个脚标，就会出现两重求和．所以今后遇到类似分割、求和、取极限问题时尽可能采用微元法来处理．

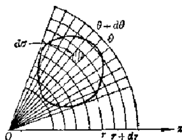


图 2 24

在 D 中取出典型一个小区域 $\Delta\sigma$，它是由半径为 r 和 $r+dr$ 的圆弧段，与极角为 θ 和 $\theta+d\theta$ 的射线段组成，当 dr 与 $d\theta$ 充分小时(注意 $dr=\Delta r$，$d\theta=\Delta\theta$，面体积微元 dV 是 ΔV 的主要部分，面积微元 $d\sigma$ 是 $\Delta\sigma$ 的主要部分)，我们不仅可以把曲的圆弧段看成直线段，而且可以把相交的射线段看成平行的射线段，所以小区域 $\Delta\sigma$ 的面积的主要部分，等于以 $rd\theta$ 为长、以 dr 为宽的小矩形面积，即

$$d\sigma \quad r\,d\theta\,dr.$$

因而体积 ΔV 的主要部分为

$$dV=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

由此得出曲顶柱体的体积 V 为

$$V=\iint_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

因为不管用什么坐标系计算曲顶柱体的体积，所得体积的值应该一样，所以有

$$\iint_{D} f(x,\ y)\,d\sigma=\iint_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr. \qquad (2.4)$$

可见，把二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 化为极坐标系下的二重积分时，只要把被积函数中的 x 和 y 分别换成 $r\cos\theta$ 和 $r\sin\theta$，再把 $d\sigma$ 换成 $r\,dr\,d\theta$。此外积分区域 D 要变换成变量 r，θ 所对应的活动范围 D'。这样在 D' 上的关于 r，θ 的二重积分，同样也可以化为累次积分来计算。

设积分区域 D 是由极点出发的两条射线 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$，和两条连续曲线 $r=\varphi_1(\theta)$、$r=\varphi_2(\theta)$（在 $[\alpha, \beta]$ 上，$0\leqslant\varphi_1(\theta)\leqslant\varphi_2(\theta)$）所围成，也就是说，区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta) \quad 与 \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示（图 2 25）。

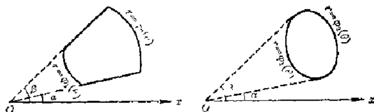


图 2 25

这个区域 D 亦可以认为是这样形成的，如图 2 26 所示，对于区间 $[\alpha, \beta]$ 内的任一 θ，相应地有极径从 $r=\varphi_1(\theta)$ 到 $r=\varphi_2(\theta)$ 的一条线段与之对应，当 θ 从 α 变到 β 时，这条变动线段就扫过区域 D。

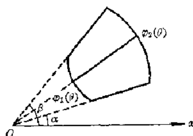


图 2 26

与直角坐标系情形相仿，在把极坐标系下的二重积分

$$\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,d\theta\,dr$$

化为累次积分时，先把 θ 暂时看作常数，在相应的线段上对 r 计算定积分

$$\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr;$$

然后，把所得结果在区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上对 θ 积分，即得

$$\iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\right]d\theta, \qquad (2.5)$$

这就是极坐标系下的二重积分化为累次积分的公式.

如果 $\varphi_1(\theta)=0$，即 D 为两条射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，和连续曲线 $r=\varphi(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 所围成的曲边扇形(图 2-27)，就是说 D 可以用不等式

$$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta) \quad 与 \quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示，那么

$$\iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\right]d\theta.$$

如果极点 O 在区域 D 内，而 D 的边界曲线的方程为 $r=\varphi(\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，即区域 D 可用不等式

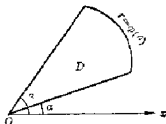


图 2-27

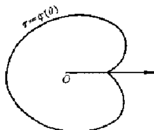


图 2-28

$$0\leqslant r\leqslant\varphi(\theta)\quad 与\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示(图 2 28). 那么

$$\iint_{D'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta.$$

【例 7】 计算二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$, 其中区域 D: $x^2+y^2\leqslant a^2$.

解: 在极坐标系下, 区域 D(图 2 29)可表示为:

$$0\leqslant r\leqslant a\quad 与\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

又被积函数 $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$. 所以

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\iint_{D'} e^{-r^2}\cdot r\,d\theta\,dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}r\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

这题的被积函数我们久闻其名, 若用直角坐标系是积不出来的, 而用极坐标时, 面积元素中的 r 因子帮了很大的忙, 使不可积函数变为可积的函数. 可见, 不同坐标系各有其不同的用处.

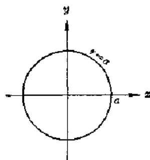


图 2 29

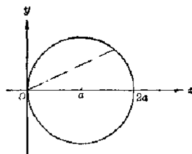


图 2-30

【例 8】 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, 其中 D: $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$. (图 2-30).

解: 由于积分区域和被积函数的对称性, 所求积分等于两倍上半圆 D_1 上的积分. 我们先把 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 变到极坐标系:

$$(r\cos\theta-a)^2+(r\sin\theta)^2=a^2,$$

化简得

$$r=2a\cos\theta.$$

对于区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内的任一 θ, 相应地有极径从 $r=0$ 到 $r=2a\cos\theta$ 的一条线段与之对应, 因此有

$$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=2\iint\limits_{D_1}r\cdot r\,d\theta\,dr=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\,dr$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}a^3\cos^3\theta\,d\theta=\frac{16}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta=\frac{32}{9}a^3.$$

【例 9】 由圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 围成的空间区域被球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所截, 计算所截部分的体积.

解: 根据所给定立体的对称性, 只要计算它在第一卦限内(图 2-31)的体积 V_1, 再乘以 4 就行了.

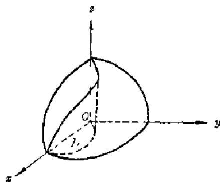


图 2-31

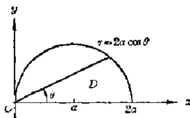


图 2-32

在第一卦限内的立体是以 xOy 面中圆周 $x^2+y^2=2ax$ 在第一象限部分，和 x 轴所围成的半圆区域 D 为底、以球面

$$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$$

为顶的曲顶柱体．从而有

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,d\sigma.$$

变到极坐标系时，区域 D 为：$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$．对于 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内的任一 θ，相应地有 $r=0$ 到 $r=2a\cos\theta$ 的一条线段与之对应(图 2-32)，因此

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D'} \sqrt{4a^2-r^2}\cdot r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-r^2}\,d(4a^2-r^2)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left[(4a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{8}{3}a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{8}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

所以，所求立体体积为

$$V=4V_1=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

【例 10】 计算由椭球抛物面 $z=x^2+2y^2$，及抛物面 $z=2-x^2$ 所围立体(图 2-33)的体积．

解：所求立体是这样的一个空间物体．从 x 轴正向看去

是一抛物线 $z=2y^2$，直线 $z=2$ 围成的图形，从 y 轴正向看去，是由抛物线 $z=x^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的图形，从 z 轴正向往下看去，是一圆形区域 D，D 的边界曲线是上述两个曲面的交线

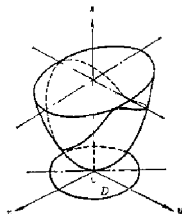


图 2 33

$$\begin{cases} z=x^2+2y^2, \\ z=2-x^2, \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影曲线．所以 D 的边界曲线方程，可以从上述两方程中消去 z 而得到，即为

$$x^2+2y^2=2-x^2,$$

化简得

$$x^2+y^2=1.$$

所求立体体积可以看成是两个曲顶柱体体积之差，上一个是以 $z=2-x^2$ 为顶的曲顶柱体，下一个是以 $z=x^2+2y^2$ 为顶的曲顶柱体，所以

$$V=\iint\limits_D (2-x^2)d\sigma-\iint\limits_D (x^2+2y^2)d\sigma=\iint\limits_D 2(1-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)r\,dr=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta=\pi.$$

2.4 一个广义积分

广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

在概率论中占有重要的地位，它的几何意义表示两头伸展到无穷的曲边梯形的面积（图 2 34）．由于 e^{-x^2} 的原函数不是

切等函数，所以不能用微积分基本定理来求出这一广义积分的值. 但利用重积分的计算，很容易就可求出这一广义积分的值.

首先，我们考虑曲面

$$z=e^{-(x^2+y^2)}$$

它是由曲线 $z=e^{-x^2}$ 绕 z 轴旋转一周所得到的曲面. 这个曲面整个位在 xOy 平面之上，在原点处有高度为 1 的高峰，离开原点不远，曲面高度很快下降，逐渐贴近 xOy 平面，并以 xOy 面为它的渐近面.

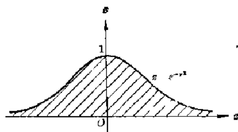


图 2 34

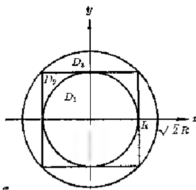


图 2 35

为了通过重积分来求广义积分值，我们在 xOy 面上取三个区域 D_1、D_2、D_3，其中 D_1、D_3 是以原点为心、半径为 R、$\sqrt{2}R$ 的圆，D_2 是以原点为中心、边长为 $2R$ 的正方形. 从图 2 35 可看出，区域 D_3 包含区域 D_2，区域 D_2 又包含区域 D_1. 因此，以 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ 为顶，以 $D_i(i=1, 2, 3)$为底的曲顶柱体体积有下列关系：

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \leqslant \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma \leqslant \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma. \qquad (2.6)$$

由例 7 知上式两头的重积分值分别为：

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\pi(1-e^{-R^2})\quad(a=R),$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\pi(1-e^{-2R^2})\quad(a=\sqrt{2}R).$$

中间那个积分由例 1 后的说明，可化为两个定积分的乘积：

$$\iint\limits_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\iint\limits_{\substack{-R\leqslant x\leqslant R\\-R\leqslant y\leqslant R}} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy$$

$$=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy=\left(\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\right)^2.$$

上式最后一步是因为定积分表示一个数，这个数不依赖于积分变数的记号，所以可以把积分变数 y 换写成 x。

将所得结果代入(2.6)得

$$\pi(1-e^{-R^2})\leqslant\left(\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\right)^2\leqslant\pi(1-e^{-2R^2}),$$

既然上式对任意正值 R 都成立，我们可以令 $R\to+\infty$ 对上式取极限，由于两端极限为 π，根据极限不等式性质，知中间的极限也存在，而且等于 π，即

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\right)^2=\pi.$$

从而得
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\pi,$$

即
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

习 题 三

1 计算下列二重积分：

1) $\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$，$D$：$r=a(1+\cos\theta)$围成区域上半部分；

2) $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, D: $ax\leqslant y\leqslant\beta x$ 与 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$ $(\beta>\alpha>0,\ b>a>0)$;

3) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2\leqslant a^2$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2\leqslant ay$;

5) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D: $x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2\leqslant 1$;

6) $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^{3/2}}$, D: $0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant a$.

2. 求下列曲线所围的面积:

1) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\geqslant a^2$;

2) $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

[提示: 根据 $r\geqslant 0$, 确定 θ 变化的范围.]

3. 求下面曲面所围的体积

1) $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0(a\geqslant\sqrt{2}\,R)$;

2) $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$, $x^2+y^2=2ax$, $z=0$;

3) $z=a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$, $x=0$, $z=x$.

4. 给定第一象限的区域 D. $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 与 $\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)$. 证明: D 绕 x 轴和 y 轴旋轴所得旋转体的体积为:

$$V_x=2\pi\int_\alpha^\beta \sin\theta\,d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r^2dr,$$

$$V_y=2\pi\int_\alpha^\beta \cos\theta\,d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r^2dr.$$

[提示: 先考虑一面积微元旋转所得的体积.]

第三节 三重积分概念与计算

3.1 三重积分概念

二重积分在几何上表示立体的体积, 三重积分已没有几

何意义，但它在物理和力学中同样有重要的应用。例如，求不均匀物体的质量、求物体的重心、转动惯量，求物体间相互的引力等都需要三重积分的概念。

我们考虑求物体的质量问题。设一物体占有空间区域 V，在 V 中每一点 (x, y, z) 处的体密度为 $\rho(x, y, z)$，其中 $\rho(x, y, z)$ 是 V 上的连续正值函数。试求该物体的质量。

先将区域 V 任意分割 n 个小区域 $\Delta V_i(i=1, 2, \cdots, n)$，这些记号同时也表示小区域的体积。在每个小区域 ΔV_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i)，由于 $\rho(x, y, z)$ 是连续函数，当区域 ΔV_i 充分小时，密度可以近似看成不变，而且就等于在点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的密度，因此每一小块 ΔV_i 的质量近似等于

$$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i,$$

物体 V 的质量就近似等于

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

令小区域的个数 n 无限增加，而且每个小区域 ΔV_i 无限地缩向于一点(记作 $\|\Delta V\|\to 0$)时，通过取极限即得物体 V 的质量

$$M=\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

仿照二重积分定义可以给出三重积分的定义。对有界闭区域 V 上的函数 $f(x, y, z)$，我们称极限

$$\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i,$$

为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 V 上的三重积分，记作

$$\iiint_V f(x, y, z)dv,$$

或
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数，V 叫做积分区域.

因此，物体的质量就是密度函数在区域 V 上的三重积分，即

$$M=\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dv.$$

如果在区域 V 上 $f(x, y, z)\equiv 1$，并且 V 的体积仍记作 V，那么由三重积分定义知

$$\iiint\limits_V 1\,dv=V.$$

这就是说，三重积分 $\iiint\limits_V dv$ 在数值上等于区域 V 的体积.

【例 1】 计算三重积分 $\iiint\limits_V x\,dv$，V：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

解：由于三重积分是某种和式的极限，现在取极限时我们采用一种特殊的分割和取点，直接来求这个极限值即积分值.

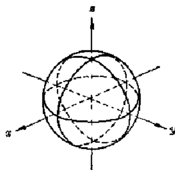


图 2-36

积分区域 V 为一圆球，yz 平面把球分为前、后半球(图2-36). 先把前半个球分割成 n 个小区域 ΔV_i，在每个 ΔV_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，然后以 yz 坐标面作为一面镜子，则后半球是前半球在镜中的像，所以可把前半个球的分割、取点落在镜中的像，作为后半个球的分割、取点，注意相应于 ΔV_i 的像为 ΔV_i，但相应于点(ξ_i, η_i, ζ_i)的像为点$(-\xi_i, \eta_i,$

$\zeta_i)$.

这样，我们就把圆球分割成 $2n$ 个小区域，它的积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}(-\xi_i)\Delta V_i+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\Delta V_i=0.$$

当 $\|\Delta V\|\to 0$ 时，永远保持两个半球的分割、取点关于 yz 坐标面是对称的，则有

$$\iiint_V x dv=\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_i)\Delta V_i=0.$$

一般来说，若区域 V 关于 yz 平面是对称的，被积函数关于 x 是奇函数，则三重积分必为零。读者还可考虑其它各种对称情形。

3.2 利用直角坐标系计算三重积分

三重积分的计算可以化为算一个定积分，和算一个二重积分，从而也就化为算三个定积分问题。

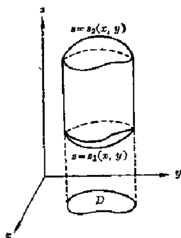


图 2.37

设区域 V 是一个由 xOy 平面区域 D 的边界作上下移动所得的柱面，和两张曲面 $z=z_1(x, y)$、$z=z_2(x, y)$（在区域 D 上 $z_1(x, y)\leqslant z_2(x, y)$）所围成（图 2.37）。对这种区域 V，计算三重积分

$$\iiint_V f(x, y, z)dv,$$

可以化为先对 z 求一次定积分，再对 x、y 算一个二重积分，即

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dv = \iint\limits_D\left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz\right]dxdy$$

$$= \iint\limits_D dx\,dy\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz.$$

这个公式可以这样理解. 计算三重积分，就是要使积分变量跑遍整个区域V，我们可以分两步来实现这一点. 设区域V在xOy面上的投影区域为D，对于D中任意一点(x, y)，有竖坐标$z=z_1(x, y)$到$z=z_2(x, y)$的一条线段与之对应，先让积分变量沿着这线段变动，随之完成了函数$f(x, y, z)$对z的定积分；然后让点(x, y)跑遍整个区域D，相应的线段就跑遍整个区域V，所以再求二重积分时，积分变量既不重复也不遗漏地跑遍整个区域V，也就对函数$f(x, y, z)$完成了区域V上的三重积分.

【例 2】 计算三重积分

$$\iiint\limits_V \frac{dv}{(1+x+y+z)^3},$$

其中V是由平面$x=0$、$y=0$、$z=0$及$x+y+z=1$所围成的四面体.

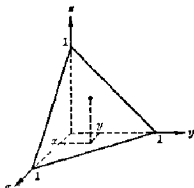


图 2-38

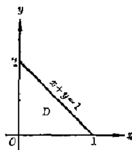


图 2-39

解：先画出区域 V(图 2-38) 和它在 xOy 面上的投影区域 D(图 2-39). D 是由直线 $x=0$、$y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的三角形. 对于 D 中任意一点 (x, y)，相应地有竖坐标 $z=0$ 到 $z=1-x-y$ 的一条线段与之对应，所以

$$\iiint\limits_V \frac{dv}{(1+x+y+z)^3}=\iint\limits_D dx\,dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\iint\limits_D\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}dx\,dy$$

$$=\iint\limits_D\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dx\,dy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(1+x+y)}-\frac{y}{4}\right]_0^{1-x}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right]dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

【例 3】 计算三重积分

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dv,$$

其中 V: $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

解：画出区域 V(图 2-40). 我们看出区域 V 及被积函数关于变量 x、y、z 是轮换对称的. 比如说把 x 换成 y、y 换成 z、z 换成 x 后，则积分 $\iiint\limits_V x\,dv$ 变成积分 $\iiint\limits_V y\,dv$，它们之间的差别仅仅在于记号的不同，而积分的值不依赖于积分变量采用什么样的记号. 所以我们有

$$\iiint\limits_V x\,dv=\iiint\limits_V y\,dv=\iiint\limits_V z\,dv.$$

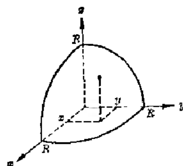


图 2-40

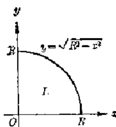


图 2-41

这样只需求积分$\iiint\limits_V z dv$ 就够了.

区域V 在 xOy 面上的投影区域为 D: $x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2\leqslant R^2$ (图 2-41). 对于 D 中任意一点(x, y), 相应地有竖坐标从 $z=0$ 到 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的一条线段与之对应, 因此

$$\iiint\limits_V z dv=\iint\limits_D dx\,dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz=\iint\limits_D \frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)dx\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \frac{1}{2}(R^2-r^2)\cdot r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{8}\,d\theta=\frac{\pi}{16}R^4.$$

所以得
$$\iiint\limits_V (x+y+z)dv=\frac{3\pi}{16}R^4.$$

三重积分化为累次积分时,除上面所说的方法外,也可以先求二重积分再求定积分. 若积分区域V 如图 2-42 所示,它在 z 轴的投影为区间 $[e, f]$. 对于区间内的任意一点z, 过 z 作平行于 xOy 面的平面, 该平面与区域 V 的交为一平面区域,记作 $D(z)$, 对于区间$[e, f]$内不同的 z, 平面区域 $D(z)$的大小和形状可以不同. 对这种区域上的二重积分, 可以化为

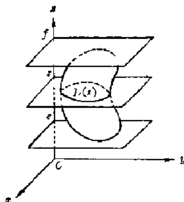


图 2-42

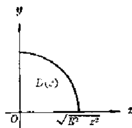


图 2-43

先对区域 $D(z)$ 求二重积分，再对 z 在 $[e, f]$ 上求定积分，即

$$\iiint\limits_V g(x, y, z)dv = \int_e^f \left[\iint\limits_D g(x, y, z)dxdy \right] dz.$$

【例 4】 用上述公式重新计算例 3 中的积分。

解：已知 $\iiint\limits_V (x+y+z)dv = 3\iiint\limits_V zdv.$

区域 V 在 z 轴上的投影区间为 $[0, R]$，对于该区间中任意一点 z，相应地有一平面区域 $D(z)$：$x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2\leqslant R^2-z^2$ 与之对应(图 2-43)。由公式

$$\iiint\limits_V zdv = \int_0^R dz \iint\limits_{D(z)} z\,dx\,dy.$$

求内层积分时，注意 z 看成常数，及 $D(z)$ 的面积为 $\pi(R^2-z^2)$，所以

$$\iint\limits_{D(z)} z\,dx\,dy = z\iint\limits_{D(z)} dx\,dy = z\cdot\pi(R^2-z^2),$$

即得

$$\iiint_V (x+y+z)\,dv = 3\iiint_V z\,dv = 3\int_0^R dz \iint_{D_{zr}} z\,dx\,dy$$

$$=3\int_0^R z\cdot\pi(R^2-z^2)dz = 3\pi\left(\frac{R^2z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^R = \frac{3\pi}{4}R^4.$$

【例 5】 计算三重积分

$$I=\iiint_V (x+y+z)^2 dv,$$

其中 V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解：因 $I=\iiint_V (x+y+z)^2 dv$

$$=\iiint_V (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)dv.$$

区域 V 关于 yz 平面对称，函数 $2xy$、$2xz$ 是 x 的奇函数，由例 1 后的说明，知积分

$$\iiint_V 2xy\,dv = 0 = \iiint_V 2xz\,dv.$$

又区域 V 关于 xz 平面对称，函数 $2yz$ 是 y 的奇函数，同理有

$$\iiint_V 2yz\,dv = 0.$$

所以 $I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dv = \iiint_V x^2\,dv + \iiint_V y^2\,dv + \iiint_V z^2\,dv$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

我们先来计算 I_3. 因区域 V 在 z 轴上的投影区间为 $[-c, c]$，对于区间内任意一点 z，相应地有一平面区域 $D(z)$：

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\leqslant 1$$

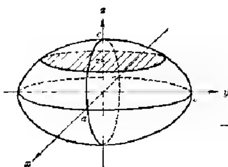


图 2-44

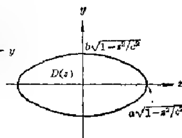


图 2-45

与之对应(图 2-44 与图 2-45)．所以

$$I_3=\iiint\limits_V z^2 dv=\int_{-c}^{c} dz\iint\limits_{D(z)} z^2 dx dy.$$

求内层积分时，注意 z^2 看成常数，区域 $D(z)$ 的面积为

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

即得 $$I_3=\int_{-c}^{c}\pi abz^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

同理，可以求出

$$I_1=\frac{4}{15}\pi bca^3,$$

$$I_2=\frac{4}{15}\pi cab^3.$$

最后得 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dv=\frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$

习 题 四

1．计算下列三重积分：

1) $\iiint\limits_V xy^2z^3 dx\,dy\,dz$，$V$ 是由曲面 $z=xy$、$y=x$、$x=1$，$z=0$ 所围成；

2) $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$，V 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$、$x=0$、$y=0$，$z=0$ 所围成；

3) $\iiint_V xyz\sin(x+y+z)dx\,dy\,dz$，$V$：$x\geqslant0$ 与 $y\geqslant0$ 与 $z\geqslant0$ 与 $x+y+z\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2 求下列三重积分：

1) $\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$，$V$：$0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant b$ 与 $0\leqslant z\leqslant c$；

2) $\iiint_V(lx^2+my^2+nz^2)dx\,dy\,dz$，$V$：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$（$l$、$m$、$n$ 为常数）.

3．求下列曲面所围区域的体积($m>0$)：

1) $x^2+y^2=a^2$，$z=0$，$z=mx(m>0)$ 在 $x>0$ 的部分；

2) $x^2+y^2=a^2$，$z=0$，$z=m(x+a)$；

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2$，$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$ $(a>0)$；

4) $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$，$z^2+x^2=a^2$.［提示：见图 2-46.］

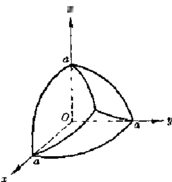


图 2-46

3.3 利用柱坐标系计算三重积分

空间柱坐标系就是平面极坐标加上 z 轴，它确定空间一点 P 用 r、θ、z 三个量(图 2-47)．柱坐标系与直角坐标系的关系是：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z.\end{cases}$$

其中 $0\leqslant r<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$，作这个限制是

为了使空间中的点(除 z 轴外)有且仅有一组数(r, θ, z)与其对应，必要时我们也可规定 r、θ、z 的取值范围为：

$$0\leqslant r<+\infty,\ -\pi<\theta\leqslant\pi,\ -\infty<z<+\infty.$$

$r=r_0$，是一个以 z 轴为中心轴，半径为 r_0 的圆柱面；

$\theta=\theta_0$，是一个过 z 轴极角为 θ_0 的半平面；

$z=z_0$，是一个与 xOy 面平行，高度为 z_0 的水平面.

点 $P(r, \theta, z)$ 也可以看成是由半径为 r 的圆柱面、极角为 θ 的半平面、高度为 z 的水平面相交而得的点。

把三重积分

$$W=\iiint\limits_V f(x, y, z)dv$$

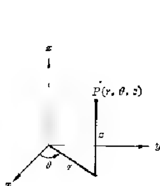


图 2-47

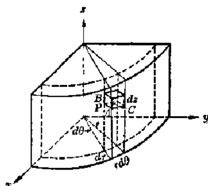


图 2-48

想象成求物体的质量（无妨设 $f(x, y, z)>0$）．在柱坐标系中，我们用一族同轴圆柱面：$r=$常数，一族有共同边界的半平面：$\theta=$常数，和一族平行的水平面：$z=$常数，去分割区域 V，把 V 分成许多小区域 ΔV（位于 V 的边界上的那些小区域可以略去不计），每个小区域由两个圆柱面、两个半平面和两个水平面围成．现在取出典型的一个小区域 ΔV 进行分析．它是

由半径为 r 和 $r+dr$ 的圆柱面，极角为 θ 和 $\theta+d\theta$ 的半平面，及高度为 z 和 $z+dz$ 的水平面所围成．通过以直代曲和以平行代替相交，把 ΔV 近似看成是一长方体，该长方体的三个边长分别为（图 2 48）：

$$PB=dz,\ PA=dr,\ PC=r\,d\theta.$$

其中 $P(r,\ \theta,\ z)$ 为长方体的一个顶点．ΔV 与长方体体积之差是 $dr\,d\theta\,dz$ 的高阶无穷小量，所以 ΔV 的主要部分就等于长方体的体积，即

$$dv=r\,d\theta\,dr\,dz.$$

小区域 ΔV 上的质量 ΔM，它的主要部分为

$$dM=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)r\,d\theta\,dr\,dz,$$

所以，物体 V 的质量为

$$M=\iiint\limits_{V'}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)rd\theta\,dr\,dz.$$

由于不管用什么坐标系计算物体的质量，所得出的质量应该一样，即有

$$\iiint\limits_{V}f(x,\ y,\ z)dv=\iiint\limits_{V'}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)rd\theta\,dr\,dz.$$

可见，把直角坐标系中的三重积分变换到柱坐标时，只要把被积函数中的 x、y、z 分别换成 $r\cos\theta$、$r\sin\theta$、z；把体积元素 dv 换成柱坐标系中的体积元素 $rd\theta\,dr\,dz$；把积分区域 V 换成 $r,\ \theta,\ z$ 的相应活动范围 V'．

关于微元法，我们想再说几句．称质量微元为 dM，它的意思是 dM 与 ΔM 的误差是 $d\theta\,dr\,dz$ 的高阶无穷小量，只有局部上误差是高阶无穷小量，才能保证求和后，整体上的误差是无穷小量，最后取极限时误差趋于零．如果局部上 dM 与 ΔM 的误差不是高阶无穷小量，求和后得到整体上的误差就

不是无穷小量，取极限时就不可能得出准确值．不管用微元法名词还是不用这个名词，都是根据所述原则来处理的，决不可以任意地以直代曲、以平行代替相交．

柱坐标系中的三重积分，同样可以化为算一个重积分和算一个定积分．

设区域V具有下面性质，它介于两个半平面$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$之间，对于区间$[\alpha,\beta]$中的任一θ，极角为θ的半平面与区域V的交为RZ平面上的平面区域$D(\theta)$（图2-49）．对这种区域V的三重积分，可以化为先对r、z求二重积分，再对θ求定积分，即

$$\iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\,r\,d\theta\,dr\,dz$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\iint\limits_{D(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)\,r\,dr\,dz.$$

上式内层积分是RZ直角坐标系中的二重积分，然后让θ由角度α旋转到角度β，相应的面$D(\theta)$就扫遍整个区域V，所以再对θ求定积分时，积分变量恰好跑遍区域V'，这就完成了区域V'上的三重积分．

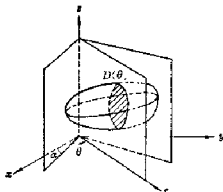


图 2-49

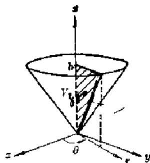


图 2-50

【例 6】 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dv$，其中 V 是由圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ 所围成的区域。

解：画出区域 V(图 2-50)．由图可见，这个区域可以认为夹在半平面 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 之间．为了求 $D(\theta)$，把方程 $x^2+y^2=z^2$、$z=h$ 变到柱坐标系得：

$$r=z,\ z=h.$$

对于区间 $[0,\ 2\pi]$ 中的任一 θ，$D(\theta)$ 是由直线 $r=z$、$z=h$ 和 z 轴围成的三角形(图 2-51)．一般来说，只要把 V 的边界方程中 θ 看成常数，即为 $D(\theta)$ 的边界曲线方程，所以形式上 V 的边界方程与 $D(\theta)$ 的边界方程没有差别，只是概念上一个 θ 是变的而一个 θ 是固定的．对 $D(\theta)$ 求积时利用平面直角坐标系计算公式，即得：

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dv=\iiint\limits_{V'} r^2\cdot r\,d\theta\,dr\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\iint\limits_{D(\theta)} r^3dr\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^h dr\int_r^h r^3\,dz=2\pi\cdot\int_0^h r^3(h-r)dr=\frac{\pi}{10}h^5.$$

【例 7】 计算三重积分 $\iiint\limits_V z\,dv$，其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的区域．

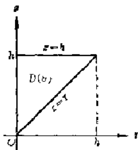


图 2-51

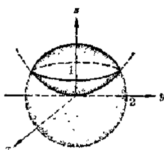


图 2-52

解：画出区域 V 的图形（图 2-52）。由图看出区域 V 夹在半平面 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 之间。为了求 $D(\theta)$，先把方程 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 变到柱坐标系，得到

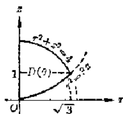


图 2-53

$$r^2+z^2=4,\quad r^2=3z.$$

所以区域 $D(\theta)$ 是由圆周 $r^2+z^2=4$ 与抛物线 $r^2=3z$ 及 z 轴围成的图形（图 2-53），两曲线的交点为

$$z=1,\quad r=\sqrt{3}.$$

因此
$$\iiint\limits_V z\,dv=\iiint\limits_{V'} zr\,d\theta\,dr\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\iint\limits_{D(\theta)} zr\,dr\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} zr\,dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r}{2}\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)dr=\frac{13}{4}\pi.$$

柱坐标系中重积分也可用如下办法化为累次积分。设区域 V 是由平面区域 D 的边界上下移动所得的柱面，及 D 上的两张曲面 $z=z_1(r,\theta)$、$z=z_2(r,\theta)$ $(z_1(r,\theta)\leqslant z_2(r,\theta))$ 所围成，则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iint\limits_D r\,d\theta\,dr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz.$$

上面两个例题也都可用这一方法进行计算。

习　题　五

1．求下列三重积分：

1) $\iiint\limits_V \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dv$，$V$ 由曲面 $x^2+y^2=a^2$、$z=0$、$z=h\,(h>0)$ 所围成；

2) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dv$, V 由曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所围成;

3) $\iiint\limits_V z dv$, V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z$ 所围成;

4) $\iiint\limits_V z dv$, V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围区域在第一卦限部分;

5) $\iiint\limits_V z^2 dv$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 与 $x^2+y^2\leqslant ax$.

2. 求下列曲面所围成立体的体积:

1) $y^2=a^2-az$, $x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $z=0$;

2) $y^2=a^2-az$, $x^2+y^2=ax$, $z=0$;

3) $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

3. 求曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球 $x^2+y^2+z^2=4az$ 分成两部分体积之比.

3.4 利用球坐标系计算三重积分

球坐标系确定空间一点 P 用 ρ, θ, φ 三个量 (图 2-54), 它与直角坐标系的关系是:

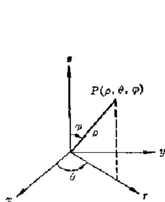


图 2-54

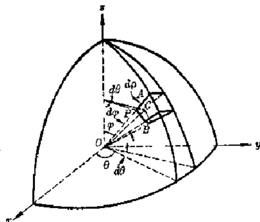


图 2-55

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$

其中 ρ, θ, φ 的取值范围为：

$$0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\theta<2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

作这个限制为了使空间中的点(除 z 轴外)，与$(\rho,\ \theta,\ \varphi)$间能建立一一对应的关系.

$\rho=\rho_0$，是一个以原点为心，半径为 ρ_0 的球面；

$\theta=\theta_0$，是一个过 z 轴，且极角为 θ_0 的半平面；

$\varphi=\varphi_0$，是一个以原点为顶点，z 轴为轴，张角为 φ_0 的锥面.

点 $P(\rho,\ \theta,\ \varphi)$也可以看成是由半径为 ρ 的球面，极角为 θ 的半平面，张角为 φ 的锥面相交而得的点.

我们把三重积分

$$\iiint f(x,\ y,\ z)dv$$

想象为求物体的质量. 在球坐标系中，我们用一族同心的球面：$\rho=$常数；一族有公共边界的半平面：$\theta=$常数；和一族同轴的圆锥面：$\varphi=$常数去分割区域 V，把 V 分成许多小区域(位于区域 V 边界面上的那些小区域可略去不计). 这些小区域由两个球面、两个半平面、两个锥面所围成. 取出典型一个小区域 ΔV 进行分析. 它是由半径为 ρ 和 $\rho+d\rho$ 的球面，极角为 θ 和 $\theta+d\theta$ 的半平面，张角为 φ 和 $\varphi+d\varphi$ 的圆锥面所组成(图 2-55). 通过以直代曲和以平行代替相交，把 ΔV 近似看成是一长方体，它的三个边长分别为：

$$PA=d\rho,\ PB=\rho d\varphi,\ PC=\rho\sin\varphi\, d\theta.$$

所以 $$dv=\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

这里点 $P(\rho,\theta,\varphi)$ 是长方体的一个顶点. 小区域 ΔV 上的质量 ΔM 的主要部分为

$$dM = f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

于是得到物体 V 的质量为

$$M=\iiint_{V'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)$$
$$\times\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

由于不管用什么坐标系计算物体的质量，所得的值应该一样，即有

$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$=\iiint_{V'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho.$$

可见，把直角坐标系中三重积分变换到球坐标系时，只要把被积函数中的 x、y、z 分别换成 $\rho\sin\varphi\cos\theta$、$\rho\sin\varphi\sin\theta$、$\rho\cos\varphi$，把体积元素 dv 换成球坐标系中的体积微元 $\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi d\rho$，把积分区域 V 换成 θ、φ、ρ 的相应活动范围 V' 就行了.

球坐标系中的三重积分，同样可化为算一个二重积分和算一个定积分.

设区域 V 具有柱坐标系中所述性质，则

$$\iiint_V f\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho=\int_\alpha^\beta d\theta\iint_{D(\theta)} f\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho.$$

上述公式可以这样理解，设区域 V 夹在两个半平面 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之间($\alpha<\beta$)，对于区间$[\alpha,\beta]$中的任一 θ，区域 V 有一块面 $D(\theta)$ 与之对应. 这样先求这块面上的重积分，然后让半平面由角度 α 旋转到角度 β，相应的面 $D(\theta)$就扫遍整个区域

V，所以再对 θ 求定积分时，积分变量恰好跑遍整个区域 V，也就是说完成了区域 V 上的三重积分.

【例 8】 计算三重积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv,\ V:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2z.$$

解：先画出 V 的图形（图 2-56）. 由图看出，区域 V 可以看成夹在角度 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 半平面之内. 为了求 $D(\theta)$，把方程 $x^2+y^2+z^2=2z$ 变到球坐标系中得

$$\rho=2\cos\varphi.$$

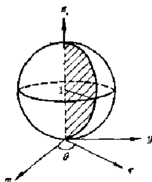


图 2-56

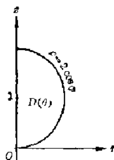


图 2-57

对于区间[0, 2π]中的任意一个 θ，相应的 $D(\theta)$ 为一半圆（图 2-57），对 $D(\theta)$ 利用平面极坐标系中二重积分化累次积分的公式，所以

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{V'}\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\iint\limits_{D(\theta)}\rho^4\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\, d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\sin\varphi\cos^5\varphi\, d\varphi=\frac{32}{15}\pi.$$

【例 9】 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dv$, 其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所围成的区域.

解: 先画出区域 V 的图形(图 2-58), 由区域的对称性和被积函数为 z 的偶函数, 所以三重积分等于两倍上半个区域上的积分. 记上半个区域为 V_1, 则

$$\iiint\limits_V z^2 dv = 2\iiint\limits_{V_1} z^2 dv.$$

把 V_1 的边界曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 变到球坐标系得

$$\rho=R, \quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

区域 V_1 夹在半平面 $\theta=0$ 与 $\theta=2\pi$ 之间, 对于区间 $[0, 2\pi]$ 中的任一值 θ, 相应的 $D(\theta)$ 为 rz 平面中由圆周 $\rho=R$, 直线 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 及 z 轴所围成的区域(图 2-59). 所以

$$\iiint\limits_{V_1} z^2 dv = \iiint\limits_{V_1} \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \iint\limits_{D(\theta)} \rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^R \rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^R \rho^4 d\rho=\frac{2}{15}\pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)R^5,$$

因此, $$\iiint\limits_V z^2 dv=\frac{4\pi}{15}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)R^5.$$

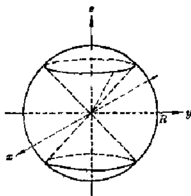


图 2.58

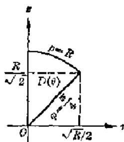


图 2.59

习 题 六

1. 计算下列三重积分:

   1) $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

   2) $\iiint\limits_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dx\,dy\,dz$, V: $a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2$ $(b>a>0)$;

   3) $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, V 由曲面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成;

   4) $\iiint\limits_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

   5) $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2}$, V: $x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $z\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

2. 求下列曲面所围成区域的体积

   1) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$;

   2) $x^2+y^2+z^2=4az$, $x^2+y^2=3z^2$.

第四节 重积分变换

求二重积分时,若积分区域是圆,一般来说化到极坐标系

进行计算比较简单. 如果积分区域是椭圆, 对这类区域我们还没有有效的计算方法. 为此, 我们要讨论更一般的积分变换问题.

4.1 变换的雅可比行列式的几何意义

先复习解析几何中学过的有关知识. 设在 xy 平面上给定三点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$ (图 2-60), 则由这三点所决定的三角形面积 σ 为,

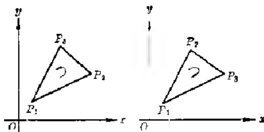


图 2-60

$$\sigma=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix},$$

当点 P_1、P_2、P_3 形成的顺序为逆时针方向时, 上式取正号; 当点 P_1、P_2、P_3 形成的顺序为顺时针方向时, 上式取负号.

现在考虑 uv 平面到 xy 平面之间的线性变换:

$$\begin{cases}x=au+bv+e,\\ y=cu+dv+f.\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 a、b、c、d、e、f 为常数, 且变换的雅可比行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0.\tag{4.2}$$

给定 uv 平面上一点(u_0, v_0)，由(4.1)可算出

$$\begin{cases} x_0 = au_0 + bv_0 + e, \\ y_0 = cu_0 + dv_0 + f. \end{cases}$$

我们称 xy 平面上的点(x_0, y_0)是点(u_0, v_0)在变换(4.1)下的象，同样可以谈及 uv 平面中的曲线、区域在变换(4.1)下的象．在条件(4.2)下，变换(4.1)的逆变换存在，所以 xy 平面上不同的点，它们的象点也不同，而且象点充满整个平面．也就是说，变换(4.1)是一个把 uv 平面一一对应地变到 xy 平面的线性变换．

根据一次方程与直线的等价性，容易看出变换(4.1)把 uv 平面上的一条直线，变成 xy 平面上的一条直线；把 uv 平面上的平行直线变成 xy 平面上的平行直线；把 uv 平面上的相交直线变成 xy 平面上的相交直线，其交角经变换后可以发生变化．

考察 uv 平面上由三点 $P'_i(u_i, v_i)$ $(i=1, 2, 3)$ 组成的三角形，它的面积记为 σ'，且假定点 P'_1、P'_2、P'_3 形成的顺序为逆时针方向．变换(4.1)把点 P'_i 变成点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$（图 2-61），设其面积为 σ．这三点 P_1、P_2、P_3 形成的顺序可能是逆时针方向，也可能是顺时针方向，所以一般地记

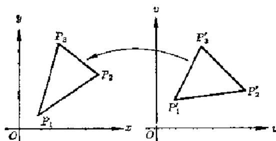


图 2-61

$$
\sigma = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & au_1+bv_1+e & cu_1+dv_1+f \\ 1 & au_2+bv_2+e & cu_2+dv_2+f \\ 1 & au_3+bv_3+e & cu_3+dv_3+f \end{vmatrix}
$$

$$
= \pm\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} 1 & au_1 & dv_1 \\ 1 & au_2 & dv_2 \\ 1 & au_3 & dv_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & bv_1 & cu_1 \\ 1 & bv_2 & cu_2 \\ 1 & bv_3 & cu_3 \end{vmatrix}\right)
$$

$$
= \pm(ad-bc)\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \pm\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\sigma',
$$

即得

$$
\sigma = \pm\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\sigma'. \tag{4.3}
$$

由上式可以得出线性变换的雅可比行列式的几何意义:

1) 对(4.3)式取绝对值,得

$$
\frac{\sigma}{\sigma'} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,
$$

这表明雅可比行列式的绝对值,是面积的伸缩系数. 设变换把 $\triangle P_1'P_2'P_3'$ 变成 $\triangle P_1P_2P_3$, 当 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|>1$ 时, 其面积放大 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 倍; 当 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|<1$ 时, 其面积经变换后缩小 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 倍. 这个结论不仅对三角形区域成立,对一般的区域 σ' 与其象区域 σ, 上述结论也成立.

2) 若 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}>0$, 要(4.3)式成立,式中必须取"+"号,这表明 P_1、P_2、P_3 形成的顺序与 P_1'、P_2'、P_3' 形成的顺序相同,

也是逆时针的方向. 一般来说,当雅可比行列式大于零时,曲线与它的象曲线保持方向不变, 即把逆时针方向变为逆时针方向,把顺时针方向变为顺时针方向;若$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}<0$,要(4.3)式成立,式中必须取"$-$"号,这表明 P_1、P_2、P_3 形成的顺序是顺时针方向,一般来说,当雅可比行列式小于零时,曲线与它的象曲线方向正好相反,即把逆时针方向变为顺时针方向,把顺时针方向变为逆时针方向.

上面是线性变换的雅可比行列式的几何意义. 由此不难得出一般变换的雅可比行列式的几何意义.

设有一般变换

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v). \end{cases} \tag{4.4}$$

函数 $x(u,\ v)$、$y(u,\ v)$ 在 uv 平面区域 Δ 上连续可微, 把 Δ 变成 xy 平面上区域 D,且在 Δ 上

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0. \tag{4.5}$$

为简单起见记雅可比行列式为

$$J(u,\ v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

由第一章第五节知道,由(4.5)不能保证(4.4)是 Δ 与 D 之间一一对应的变换, 所以还必须假定变换(4.4)是一一对应的,即逆变换在 D 上存在并连续可微. 事实上由逆变换在 D 上存在与连续可微,可以保证条件(4.5)成立.

设变换(4.4)把点$(u_0,\ v_0)$变成点$(x_0,\ y_0)$, 即

$$\begin{cases} x_0=x(u_0,\ v_0), \\ y_0=y(u_0,\ v_0). \end{cases}$$

此外把 uv 平面上以 $A'(u_0,\ v_0)$、$B'(u_0+\Delta u,\ v_0)$、$C'(u_0+\Delta u,$

$v_0+\Delta v$)、$D'(u_0, v_0+\Delta v)$为顶点的小矩形，变成 xy 平面上的一个小曲边四边形(图2-62)，记这个曲边四边形的面积为 σ，那么小矩形的面积 $\Delta u\Delta v$，与它的象的面积 σ 有什么关系呢？我们看出，当 Δu、Δv 充分小时，即在(u_0, v_0)点的充分小邻域中，变换(4.4)可以近似看成线性变换与一高阶无穷小量之和，即

$$\begin{cases} x=x_0+x'_u(u_0, v_0)(u-u_0)+x'_v(u_0, v_0)(v-v_0)+o(\rho), \\ y=y_0+y'_u(u_0, v_0)(u-u_0)+y'_v(u_0, v_0)(v-v_0)+o(\rho). \end{cases}$$

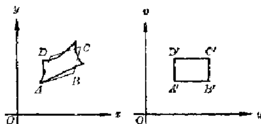


图 2-62

其中 $\rho=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}$，当 Δu、Δv 越小时，变换(4.4)在(u_0, v_0)的附近越具有线性变换的特征。设相应的线性变换把小矩形 $\square A'B'C'D'$，变成平行四边形 $\square ABCD$，可以证明小曲边四边形的面积 σ 与平行四边形 $\square ABCD$ 的面积之差，是面积 $\sigma'=\Delta u\cdot\Delta v$ 的高阶无穷小量，因此有

$$\frac{\sigma}{\sigma'}\approx\frac{\square ABCD\text{ 的面积}}{\square A'B'C'D'\text{ 的面积}}=|J(u_0, v_0)|. \qquad (4.6)$$

令 $\rho\to 0(\Delta u\to 0, \Delta v\to 0)$，即得

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sigma}{\sigma'}=|J(u_0, v_0)|.$$

这表明雅可比行列式在一点的绝对值，是变换在该点的面积伸缩系数；雅可比行列式符号的几何意义与线性变换时相同。

4.2 二重积分变换

我们把二重积分

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy$$

想象成求薄片 D 的质量．设变换（4.4）把 uv 平面上的区域 Δ 变成 xy 平面上的区域 D，且具有上述所述的条件．为了分割区域 D，我们先用平行于坐标轴的、且等距的直线网分割区域 Δ，变换（4.4）把这组直线网变成区域 D 上的曲线网（图 2-63）．这组曲线网把 D 分成许多小区域（位在 D 的边界上的小区域略去不计）．我们取出典型的一个小区域 $\Delta\sigma$，它是以 (u, v)、$(u+du, v)$、$(u+du, v+dv)$、$(u, v+dv)$ 为顶点的小曲边四边形．我们采用以直代曲、以平行代替相交的方法求这曲边四边形面积 $\Delta\sigma$ 的主要部分，也可以说在 (u, v) 点用线性变换近似代替一般变换，而 uv 平面上的小矩形，在该线性变换下的象为一平行四边形，这个平行四边形的面积是曲边四边形面积 $\Delta\sigma$ 的主要部分，所以有

$$d\sigma = |J(u, v)|dudv$$

（见（4.6）式）．在 $\Delta\sigma$ 上薄片的质量 ΔM 的主要部分为

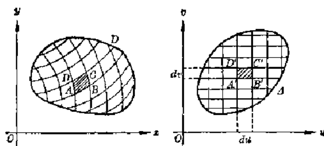


图 2-63

$$dM = f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv,$$
这样所求薄片的质量为

$$M = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv.$$

由于不管用什么方法计算薄片的质量，得到的质量应该一样，即有

$$\iint_{D} f(x, y)dx\,dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv.$$

这就是二重积分的变换公式. 可见，把 xy 平面上的重积分变为 uv 平面上的重积分时，只要把被积函数中的 x、y 用变换函数代入，把积分区域 D 换成 Δ，把面积元素 $d\sigma = dx\,dy$ 换成 $|J(u, v)|dudv$，即成.

前面所讲的重积分的极坐标计算公式，是一般重积分变换的一个特例. 设求重积分

$$\iint_{D} f(x, y)dx\,dy, \quad D: \ x^2+y^2 \leqslant a^2.$$

作变换:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{4.7}$$

它把 $r\theta$ 平面上的区域 Δ:

$$0 \leqslant r \leqslant a$$

与 $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,

变为 xy 平面上的区域 D(图 2-64). 变换的雅可比行列式

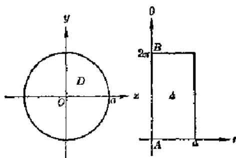


图 2-64

$$J(r,\ \theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

但我们发现这个变换把 Δ 的边界 AB、CD 变成圆 D 的同一条半径，把直线段 AD 变成圆 D 的圆心，所以变换在 Δ 的边界上没有一一对应性，不具备变换 (4.4) 中应具备的条件. 为了使它满足变换(4.4)的条件，从而可应用重积分变换公式，这时只需把出毛病的地方先挖去，考虑区域 Δ_ε: $0<\varepsilon\leqslant r\leqslant a$ 与 $\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 变换(4.7)把区域 Δ_ε 变为区域 D_ε(图 2-65)，它是原来的圆 D 剪去一个张角为 ε 的扇形、和以原点为心以 ε 为半径的小圆所余部分(图 2-65). 则变换(4.7)在 Δ_ε 满足变换(4.4)中的条件，所以

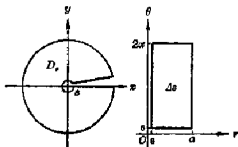


图 2-65

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Delta_\varepsilon} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr,$$

由 $f(x,\ y)$ 的可积性，及 $f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ 在 Δ 上的可积性，令 $\varepsilon\to 0$ 即得:

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\Delta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr.$$

这就是第二节所得的极坐标系计算公式，只是那里把区域 Δ 记成 D'.

一般来说，若变换(4.4)在个别点或线上条件不满足时，比如变换在某些线上不具备一一对应的条件，变换的雅可比行列式在某些点为零，这时重积分的变换公式仍成立.

【例 1】 计算二重积分

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,$$

其中 D 是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=4x$，$x^2=y$，$x^2=4y$ 所围成的区域.

解：先画出区域 D(图 2-66)，根据区域 D 的特点，作变换

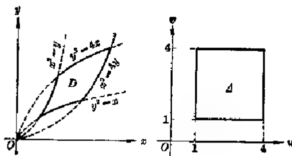


图 2-66

$$\begin{cases} u=\dfrac{y^2}{x}, \\ v=\dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$$

它把区域 D 变为长方形区域 Δ: $1\leqslant u\leqslant 4$ 与 $1\leqslant v\leqslant 4$. 由 $J(u,\ v)\cdot J(x,\ y)=1$，我们只要求出一个行列式，即可得到另一行列式. 先求出

$$J(x,\ y)=\begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}=1-4=-3,$$

所以 $\qquad J(u,\ v)=1/J(x,\ y)=-1/3.$

并注意 $\qquad uv=\dfrac{y^2}{x}\cdot\dfrac{x^2}{y}=xy,$

因此有 $\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy$

$$=\iint\limits_{\Delta} u\cdot v\cdot\frac{1}{3}\;du\,dv=\frac{1}{3}\int_{1}^{4}u\,du\cdot\int_{1}^{4}v\,dv=\frac{75}{4}.$$

这题的变换函数与被积函数关系比较巧，用不到把原变量 x、y 解成新变量 u、v 的函数. 一般来说总得把原变量 x、y 解成新变量 u、v 的函数，才能把关于 x、y 的积分变成关于 u、v 的积分. 这题也说明变换的雅可比行列式为一常数，但变换仍可以不是线性变换.

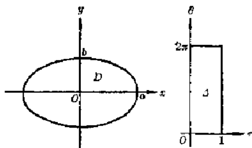


图 2-67

【例 2】 计算重积分

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

其中 D: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

解：作变换

$$\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\end{cases}$$

变换把矩形 Δ: $0\leqslant r\leqslant 1$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 变为椭圆 D(图 2-67). 变换行列式为

$$J(r,\ \theta)=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr,$$

所以

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta (a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)\cdot abr\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta\cdot\int_0^1 abr^3\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2).$$

最后，我们想指出一一对应条件的重要性. 如变换

$$\begin{cases} x=u^2-v^2,\\ y=2uv, \end{cases}$$

因 $x^2+y^2=(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2,$

即可看出变换把半径为 r 的圆：$u^2+v^2=r^2(0<r<1)$，变为半径为 r^2 的圆：$x^2+y^2=(r^2)^2$，当 r 连续地由 0 移动到 1 时，变换就把 uv 平面上的单位圆 Δ：$u^2+v^2\leqslant 1$ 变为 xy 平面上的单位圆 D：$x^2+y^2\leqslant 1$. 变换的雅可比行列式为

$$J(u,\ v)=\begin{vmatrix} 2u & -2v\\ 2v & 2u \end{vmatrix}=4(u^2+v^2)>0,$$

只要 $(u,v)\neq(0,0)$. 但变换在 Δ 与 D 之间不是一一对应的(见第一章第五节)，这时不能用重积分变换公式，否则会得出荒谬的结果

$$\pi=\iint\limits_D dx\,dy=\iint\limits_\Delta 4(u^2+v^2)du\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 4r^2\cdot r\,dr=2\pi.$$

4.3 三重积分变换

类似于二重积分变换，可以讨论三重积分的积分变换. 设有变换

$$\begin{cases} x=x(u,\ v,\ w),\\ y=y(u,\ v,\ w),\\ z=z(u,\ v,\ w). \end{cases}$$

它把 uvw 空间区域 Ω 一一对应地变到 xyz 空间区域 V，且变换函数及其逆变换函数在各自的区域上连续可微，则

$$J(u, v, w)=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\neq 0.$$

雅可比行列式的绝对值，表示点 (u, v, w) 处体积的伸缩系数．在上述条件下，有三重积分的变换公式：

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

$$\times|J(u, v, w)|\,du\,dv\,du.$$

当变换在区域 Ω 上的有限个点、有限条线、有限张面上条件不满足时，重积分变换的公式仍成立．

特别地，对柱坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z, \end{cases}$$

它的变换行列式为

$$J(r, \theta, z)=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r,$$

所以重积分变换公式为：

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,d\theta\,dr\,dz.$$

对于球坐标变换

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases}$$

它的变换行列式为

$$J(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi\end{vmatrix}$$

$$=-\rho^2\sin\varphi,$$

所以重积分变换公式为：

$$\iiint\limits_{V} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho.$$

(注意，因为$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，所以$\sin\varphi\geqslant0$，因此$|\sin\varphi|=\sin\varphi$.)

【例 3】 计算三重积分

$$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

其中V：
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1.$$

解：作变换

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=c\rho\cos\varphi,\end{cases}$$

它把长方体Ω：$0\leqslant\rho\leqslant1$与$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$与$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$变为区域$V$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant1$. 变换行列式为

$$J(\rho,\ \theta,\ \varphi)=-abc\rho^2\sin\varphi,$$

所以

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_\Omega (a^2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\rho^2\cos^2\varphi)\cdot abc\rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)\cdot abc\sin\varphi\cdot\rho^4d\rho$$

$$=\frac{-abc}{5}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)$$

$$=\frac{abc}{5}\int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}a^2\cos^2\theta+\frac{4}{3}b^2\sin^2\theta+\frac{2}{3}c^2\right)d\theta$$

$$=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2).$$

习 题 七

1．计算下列二重积分：

1) $\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$，$D$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1$；

2) $\iint_D(x+y)\,dx\,dy$，D 是由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 所围成的区域；

3) $\iint_{x^4+y^4\leqslant1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$；[提示：先化到第Ⅰ象限积分.]

4) $\iint_D e^{(x+y)^2}dx\,dy$，$D$：$x\geqslant0$ 与 $y\geqslant0$ 与 $x+y\leqslant1$.

2．求下列曲线所围的面积：

1) $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$，$x=0$，$y=0$；

2) $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x$　$(x>0,\ y>0)$.

3．求下列曲面所围的体积：

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\quad (z>0)$;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\ z=0$.

4 计算下列三重积分

1) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz$, V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$;

2) $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, V: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$;

3) $\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$, V 是由平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围区域,其中 p、q、r、s 皆为正整数.

[提示:作变换 $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$.]

第五节 重积分的应用

5.1 求曲面面积

先讨论平面图形的投影.

设空间有一平行四边形 S(记号 S 同时也表示它的面积),因平行直线经投影后仍保持平行,所以 S 在 xy 平面上的投影也是平行四边形,记为 σ(同时也表示面积),现在要求面积 S 与 σ 之间的关系.

我们采用向量作工具来解决这一问题.设平行四边形 S 是由向量

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}\end{cases}$$

组成,则平行四边形 σ 由向量

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}'=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{b}'=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}\end{cases}$$

组成(图 2-68).

根据向量积的定义，知

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

是平行四边形 S 的法向量，引入记号

$$A=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

则
$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

且 $\boldsymbol{n}$ 的大小等于平行四边形 S 的面积，即

$$S=|\boldsymbol{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

同理
$$\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=C\boldsymbol{k},$$

得平行四边形 σ 的面积为

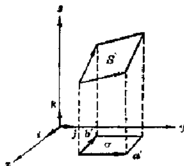


图 2-68

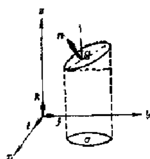


图 2-69

$$\sigma=|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'|=|C|,$$

所以
$$\frac{\sigma}{S}=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

上式右端不是别的，正是法向量 $\boldsymbol{n}$ 的第三个方向余弦取绝对值(图 2-69)，即

$$\frac{\sigma}{S}=|\cos\gamma| \quad \text{或} \quad S=\frac{\sigma}{|\cos\gamma|}.$$

其中γ是向量$\boldsymbol{n}$与向量$\boldsymbol{k}$之间的夹角．上式说明，空间平行四边形的面积，等于它的投影图形的面积，除以它们法向量间的夹角的余弦取绝对值．

如果S不是平行四边形，而是位于空间的任意一个平面图形，那么它的面积S，与其在xy平面上的投影图形的面积σ仍有关系式：

$$S=\frac{\sigma}{|\cos\gamma|},$$

其中γ是两个平面图形的法向量间的夹角．

这是因为平面图形S可用平行四边形ΔS_i的和去逼近，

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i,$$

相应地ΔS_i在xy平面上的投影为$\Delta\sigma_i$，当$n\to\infty$时，$\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$趋近于$S$在$xy$平面上的投影图形$\sigma$的面积，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma|}$$

$$=\frac{1}{|\cos\gamma|}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\frac{\sigma}{|\cos\gamma|}.$$

由上式可见，当S的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{k}$平行时，$\cos\gamma=1$，这时S与其投影图形的面积一样；当S的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{k}$垂直时，$\cos\gamma=0$，这时S的投影为一条线，所以$\sigma=S\cdot|\cos\gamma|=0$.

有了上面的准备知识，下面开始介绍曲面面积的求法．

有了定积分，能求一般平面图形的面积和旋转体的侧面积．但要求任意一块空间曲面的面积，光有定积分工具还不够，需要重积分工具才能解决这一问题．

设给定空间曲面 S，它的方程为

$$z=f(x, y),$$

曲面 S 在 xy 平面上的投影为区域 D. 并设函数 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，因此函数在每一点可微，曲面 S 在每一点切平面存在. 现在我们来求曲面 S 的面积.

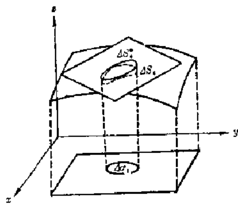


图 2-70

为此我们把区域 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$，相应地把曲面 S 分成 n 个小片 $\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 在 $\Delta\sigma_i$ 上任取 $P_i(\xi_i, \eta_i)$，相应曲面 ΔS_i 上就有一点

$$M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)),$$

过 M_i 点作曲面 S 的切平面，在这个切平面上我们取一小块 ΔS_i^*，使 ΔS_i^* 在 xy 平面上的投影，与 ΔS_i 在 xy 平面上的投影相重合(图 2-70). 当区域 $\Delta\sigma_i$ 充分小时，ΔS_i^* 可以充分好地逼近 ΔS_i，于是我们可以把 ΔS_i^* 作为 ΔS_i 的近似值. 由此得到曲面 S 的近似值

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^*.$$

要找出 ΔS_i^* 与 $\Delta\sigma_i$ 的关系. 注意曲面 S 在 M_i 点的法向量为

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}_i}=(-f'_x(\xi_i, \eta_i), -f'_y(\xi_i, \eta_i), 1),$$

它的第三个方向余弦为:

$$\cos\gamma_i=\frac{1}{\pm\sqrt{1+[f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2+[f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}.$$

由上知 $\Delta S_i^* \approx \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}$

$$=\sqrt{1+[f'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[f'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i.$$

所以 $\quad S\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'_x(\xi_i,\eta_i)]^2+[f'_y(\xi_i,\eta_i)]^2}\,\Delta\sigma_i,$

令 $|\Delta\sigma|\to 0$, 即得

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,d\sigma.$$

这就是求曲面面积的公式，它可以看成是求弧长公式

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

的推广.

【例 1】 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面积.

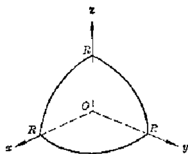


图 2-71

解：由对称性，只要求出第一卦限中那部分球的面积 S_1(图 2-71)，整个球的面积即为

$$S=8\times S_1.$$

在第一卦限中的球面方程为

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

定义域 D: $x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2\leqslant R^2$. 先求两个偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

即得 $\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$

所以 $\quad S_1=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr$

$$=-\frac{\pi R}{4}\int_0^R\frac{d(R^2-r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}=-\frac{\pi R}{2}(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R=\frac{\pi}{2}R^2,$$

由此得 $$S=8\times S_1=4\pi R^2.$$

即球面面积为其大圆面积的四倍.

【例 2】 求两个直圆柱面 $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$ 所围成立体的表面积(图 2-21).

解: 由对称性只需考虑第一卦限部分的表面积, 而立体在第一卦限部分又被平面 $z=y$ 分成两个相等的部分, 所以只需考虑在区域 D: $x\geqslant 0$ 与 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 的面积, 然后把算出结果乘以 16 即得所求表面积.

由 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

于是 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

所以 $$\frac{S}{16}=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx\,dy=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dy$$

$$=\int_0^R R\,dx=R^2,$$

即得 $$S=16R^2.$$

若曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,\ v),\\ y=y(u,\ v),\\ z=z(u,\ v),\end{cases}$$

给出, 这些函数在 uv 平面的区域 $\varDelta$ 上连续可微, 由第一章第六节知 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}.$$

其中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$，$B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$，$C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

法向量 $\boldsymbol{n}$ 的第三个方向余弦为(设 $C\neq0$)：

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

所以面积微元

$$dS=\frac{d\sigma}{|\cos\gamma|}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}d\sigma,$$

再由二重积分变换知

$$d\sigma=|J(u,v)|dudv=|C|dudv,$$

把它代入 dS 即得

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv,$$

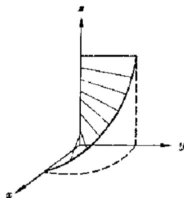


图 2-72

这时曲面的面积公式为：

$$S=\iint_{\Delta}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv.$$

【例 3】 求螺旋面

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=h\theta,\end{cases}$$

其中 r、θ 变化区域为 Δ：$0\leqslant r\leqslant a$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 试求那部分面积(图 2-72).

解：因

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)}=h\sin\theta,\ B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}=-h\cos\theta,$$

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r,$$

所以 $S=\iint\limits_{\Delta}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta\,dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{h^2+r^2}\,dr$

$$=\pi\left[r\sqrt{h^2+r^2}+h^2\ln(r+\sqrt{r^2+h^2})\right]_0^a$$

$$=\pi\left[a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)\right].$$

5.2 物体的重心

在物理学中已知道有限个质点的质点系的重心位置的求法. 设在空间中有 n 个质点, 其位置为 (x_i, y_i, z_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$, 每一个质点的质量为 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 则这个质点系的重心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 计算公式为:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

现在我们将这个公式推广到空间连续物体的情形.

设 V 为物体所占的空间区域, 物体的密度为 $\rho(x, y, z)$, 它是区域 V 上的连续函数. 将 V 分割成 n 个小区域 $\Delta V_i(i=1, 2, \cdots, n)$(这些记号同时表示它们的体积), 在 ΔV_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 每一小块 ΔV_i 的质量近似等于 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$, 并且想象把它集中在点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处, 这样就得到 n 个质点系, 物体 V 的重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 近似于这 n 个质点系的重心, 所以

$$\bar{x}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{y}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{z} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i}.$$

当 $\|\Delta V\| \to 0$ 时，即得物体 V 的重心为：

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dv},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dv},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dv}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z)dv}.$$

若物体为平面薄片，它占有平面区域 D，物体的面密度为 D 上的连续函数 $\rho(x, y)$，则该平面薄片的重心为：

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y)d\sigma}.$$

【例 4】 求一均匀的球顶锥体的重心，设该球的球心在原点、半径为 R，锥体的顶点在原点，轴为 z 轴，锥面与 z 轴交

角为 $\alpha\left(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$(图 2 73)。

解：由图 2 73 可见，物体关于 z 轴对称，并且密度为常数，所以重心应位在 z 轴上，即有

$$\bar{x}=\bar{y}=0,$$

而
$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_V z\rho dv}{\iiint\limits_V \rho dv}=\frac{\iiint\limits_V z dv}{\iiint\limits_V dv}.$$

利用球坐标计算上面两个三重积分，并注意对于区间 $[0,\ 2\pi]$ 中的任一 θ，对应有一平面区域 $D(\theta)$ 为一扇形（图 2-74）。因此

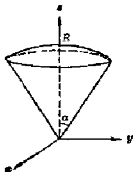


图 2 73

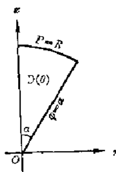


图 2-74

$$\iiint\limits_V z dv=\int_0^{2\pi} d\theta\iint\limits_{D(\theta)}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha} d\varphi\int_0^{R}\rho^3\cos\varphi\sin\varphi d\rho=\frac{1}{4}\pi R^4(1-\cos^2\alpha),$$

$$\iiint\limits_V dv=\int_0^{2\pi} d\theta\iint\limits_{D(\theta)}\rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho=2\pi\int_0^{\alpha} d\varphi\int_0^{R}\rho^2\sin\varphi\, d\rho$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\alpha),$$

即得 $\bar{z}=\frac{3}{8}(1+\cos\alpha)R.$

【例 5】 计算重积分 $\iint\limits_D x d\sigma$，其中 D 为三角形区域，三角形的三个顶点为 $(x_i, y_i)(i=1,2,3)$（图 2-75）。

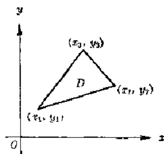


图 2-75

解：因三角形的顶点坐标并未具体给出，若用以前化累次积分办法来算，有一定的复杂性，而用重心公式可以毫不费力地得到结果。

我们考虑一平面薄片 D，密度 $\rho\equiv 1$，则它的重心为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}.$$

对于三角形区域，它的重心就是三角形的中心，即三条中线的交点，所以

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

记区域 D 的面积为 σ，

$$\sigma=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix},$$

根据图中所示三点的位置，上式取"+"号。

因此得到

$$\iint\limits_D x d\sigma=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\cdot\sigma.$$

同样，以$(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, 3, 4)$为顶点的四面体$V$的中心的$x$坐标为

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},$$

因此可得
$$\iiint_V x\,dv=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot V,$$

其中V也表示区域V的体积.

5.3 转动惯量

设空间有n个质点的质点系，其位置为$(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，每个质点的质量为$m_i$，则这个质点系关于$xy$、$yz$、$zx$坐标面的转动惯量分别为：

$$I_{xy}=\sum_{i=1}^{n} z_i^2 m_i,\quad I_{yz}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i,\quad I_{zx}=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i.$$

质点系关于x、y、z轴的转动惯量分别为：

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)m_i,\qquad I_y=\sum_{i=1}^{n}(z_i^2+x_i^2)m_i,$$

$$I_z=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i.$$

类似于重心的处理，可以把质点系的转动惯量推广到连续物体情形．设物体占有空间区域V，密度函数$\rho(x, y, z)$在V上连续，则该物体关于xy、yz、zx坐标面的转动惯量分别为：

$$I_{xy}=\iiint_V z^2\rho(x, y, z)dv,$$

$$I_{yz}=\iiint_V x^2\rho(x, y, z)dv,$$

$$I_{zx}=\iiint_V y^2\rho(x,\ y,\ z)dv.$$

物体关于 x、y、z 轴的转动惯量分别为：

$$I_x=\iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,\ y,\ z)dv,$$

$$I_y=\iiint_V (z^2+x^2)\rho(x,\ y,\ z)dv,$$

$$I_z=\iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,\ y,\ z)dv.$$

【例 6】 计算由平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

及 $x=0$、$y=0$、$z=0$ 所围成均匀物体($\rho=1$)对三个坐标面的转动惯量.

解：画出区域 V(图 2-76). 物体对平面的转动惯量为：

$$I_{xy}=\iiint_V z^2 dv.$$

区域 V 在 z 轴上的投影为区间 $[0,\ c]$，对于区间中任意一点

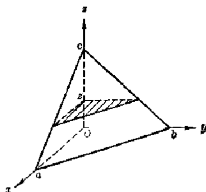


图 2-76

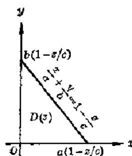


图 2-77

z，有区域 $D(z)$ 与其对应(图 2-77)。$D(z)$ 是由直线 $x=0$、$y=0$ 及

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{z}{c}$$

所围成的平面区域，其面积为 $\frac{1}{2}ab\left(1-\frac{z}{c}\right)^2$，所以

$$I_{xy}=\iiint_V z^2dv=\int_0^c dz\iint_{D(z)} z^2dxdy=\int_0^c dz\left[z^2\iint_{D(z)} dx\,dy\right]$$

$$=\int_0^c z^2\cdot\frac{1}{2}ab\left(1-\frac{z}{c}\right)^2dz=\frac{abc^3}{60}.$$

同理可得 $\qquad I_{yz}=\frac{a^3bc}{60},\quad I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}.$

5.4 引力

设有一物体 V，其密度为 $\rho(x, y, z)$，函数 $\rho(x, y, z)$ 在 V 上连续。今在 V 外一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 放置一单位质量，试求物体 V 对 P 点单位质量的引力 $\boldsymbol{F}$。

在 V 内取出典型的一小块体积元 dv，在 dv 内任取一点 (x, y, z)，体积元素 dv 的质量

$$dM=\rho(x, y, z)dv.$$

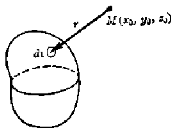


图 2-78

令

$$\boldsymbol{r}=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k},$$

向量 $\boldsymbol{r}$ 由 P 点指向 dv(图 2-78)，把体积元素 dv 看成一点，根据万有引力定律，体积元素 dv 对 P 点单位质量的引力为

$$d\boldsymbol{F}=K\frac{\rho(x, y, z)dv}{r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $r=|\boldsymbol{r}|$，K 为比例常数. 所以物体 V 对 P 点单位质量的引力为

$$\boldsymbol{F}=\iiint\limits_V \frac{K\rho(x,\ y,\ z)\boldsymbol{r}}{r^3}\,dv,$$

这里被积函数为一向量函数，积分所得结果也为一向量. 由两向量相等即其对应分量相等，所以向量 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 轴上的分量为：

$$F_x=K\iiint\limits_V \frac{\rho(x,\ y,\ z)(x-x_0)}{r^3}\,dv,$$

$$F_y=K\iiint\limits_V \frac{\rho(x,\ y,\ z)(y-y_0)}{r^3}\,dv,$$

$$F_z=K\iiint\limits_V \frac{\rho(x,\ y,\ z)(z-z_0)}{r^3}\,dv.$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$F_x$、$F_y$、$F_z$ 表示向量 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量.

若物体为一平面薄片，且位于 xy 坐标面，则它对 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 点单位质量的引力为：

$$F_x=K\iint\limits_D \frac{\rho(x,\ y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,d\sigma,$$

$$F_y=K\iint\limits_D \frac{\rho(x,\ y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,d\sigma,$$

$$F_z=-K\iint\limits_D \frac{\rho(x,\ y)z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\,d\sigma.$$

【例 7】 一半径为 a 的圆盘体，有均匀密度 ρ，穿过圆盘中心、并与圆面垂直的直线上距离盘心为 h 处放一单位质量 P，求圆盘对单位质量的引力.

解：取直角坐标系 $O-xyz$，使圆盘所在的面为 xy 平面，

过圆盘中心的垂线为 z 轴(图 2 79). 由对称性可知

$$F_x=F_y=0,$$

故只需求 F_z, 而

$$F_z=-K\rho\iint_D\frac{hd\sigma}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}=-K\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$=-\frac{K\rho h}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{d(r^2+h^2)}{(r^2+h^2)^{3/2}}$$

$$=-K\rho h\pi\left[-\frac{2}{\sqrt{r^2+h^2}}\right]_0^a=-2K\rho\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right).$$

得到的 F_z 为一负数, 表示引力的方向与 z 轴正向相反.

【例 8】 求一单位质点 P, 受半径为 R、密度为 ρ 均匀球体的引力.

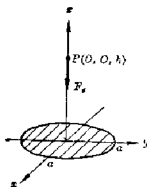


图 2 79

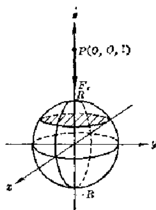


图 2 80

解: 取坐标系如图 2 80 所示, 设质点 P 与球心的距离为 $l(l>0)$, 由对称性知

$$F_x=F_y=0,$$

而
$$F_z=K\rho\iiint_V\frac{(z-l)dv}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}}.$$

区域V在z轴上的投影为区间$[-R, R]$，对于区间内的任一z，有一平面区域$D(z)$与其对应，区域$D(z)$：$x^2+y^2\leqslant R^2-z^2$.
所以

$$F_z=K\rho\int_{-R}^{R}dz\iint_{D(z)}\frac{(z-l)\,dx\,dy}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}}.$$

如同上题，可以算出内层积分

$$\iint_{D(z)}\frac{dx\,dy}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,dr}{[r^2+(z-l)^2]^{3/2}}$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-l)^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{|z-l|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+l^2-2lz}}\right).$$

因此 $$F_z=2\pi K\rho\int_{-R}^{R}\left[\frac{z-l}{|z-l|}-\frac{z-l}{\sqrt{R^2+l^2-2lz}}\right]dz.$$

由于 $$\int_{-R}^{R}\frac{z-l}{|z-l|}dz=\begin{cases}-2R, & 当\ l\geqslant R,\\ 2l, & 当\ l\leqslant R.\end{cases}$$

又由于 $$\int_{-R}^{R}\frac{z-l}{\sqrt{R^2+l^2-2lz}}dz$$

$$=\left[-\frac{z-l}{l}\sqrt{R^2+l^2-2lz}\right]_{-R}^{R}+\frac{1}{l}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2+l^2-2lz}\,dz$$

$$=-\frac{1}{l}[(l-R)|l-R|-(l+R)^2]$$

$$-\frac{1}{3l^2}[|l-R|^3-(l+R)^3]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2R^3}{3l^2}-2R, & 当\ l\geqslant R,\\ -\dfrac{4}{3}l, & 当\ 0<l\leqslant R.\end{cases}$$

代入F_z，得

$$F_z=\begin{cases}-K\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot\dfrac{1}{l^2}, & \text{当 } l>R,\\ -K\dfrac{4}{3}\pi l\rho, & \text{当 } l\leqslant R.\end{cases}$$

结果表明，当点 P 位于球外时，它受球体的引力，就好象将球体的全部质量 $m=\dfrac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$ 集中在球的中心处时，它所受到的吸引力一样．当点 P 位于球内时，吸引力与球的半径 R 无关，表明 P 点以外的球层对 P 点不发生任何作用，相当于半径为 l 的球对其球面上一点 P 的吸引力．

习　题　八

1．求下列曲面的面积：

1）曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积；

2）求三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$，$y^2+z^2=R^2$ 所围成立体的表面积；

3）求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=ax$ 内那部分的面积；

4）求圆柱 $x^2+y^2=ax$ 在曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内那部分的面积；

5）求曲面 $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 在第一卦限中被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分的面积．

2．求下列平面图形的重心（设 $\rho=1$）：

1）抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 与两坐标轴所围部分；

2）圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 除去 $x^2+ax+y^2\leqslant 0$ 后所剩部分；

3）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 在第一象限部分．

3．求半个椭球：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 与 $x\geqslant 0$ 的重心（$\rho=1$）．

4．求区域 V：$a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2$ 与 $x\geqslant 0$，在 $\rho=1$ 下的重心．

5．求三重积分：

$$\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz,$$

其中V: $x\geqslant 0$与$y\geqslant 0$与$z\geqslant 0$与$x+y+z\leqslant 1$

6. 求质量为M的均匀椭圆柱体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 与 $|z|\leqslant\dfrac{h}{2}$ 对各坐标轴的转动惯量.

7. 求质量为M的均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 对各坐标轴的转动惯量.

8. 求密度为ρ的均匀圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 与 $0\leqslant z\leqslant b$，对具有单位质量的质点$P(0, 0, h)(h>b)$的吸引力.

第二章小结

1．重积分的定义，简单说是：“分割、乘积、求和、取极限.”重积分的应用，简单说是：“分割、近似代替、求和、取极限.”具体做时常用微元法，把“分割、近似代替”变为找微元，把“求和、取极限”变为对微分的积分.

2．二重积分计算讲了直角坐标系、极坐标系和变量替换公式．计算的关键是要画好图形，先在图形上看出积分变量变化的范围，然后再写积分限．三重积分计算讲了直角坐标系、柱坐标系、球坐标系和变量替换公式．柱坐标系中定限化为平面直角坐标系定限，球坐标系中定限化为平面极坐标系定限.

3．重积分的应用讲了求一般物体的体积、一般曲面的面积、求空间物体的质量、重心、转动惯量、引力等．还利用重积分证明了求偏导数与次序无关定理，和求出了一个广义积分值.

第三章

曲线、曲面积分和场论

为了解决曲顶柱体的体积，和不均匀物体的质量等问题，在前一章中我们把定积分概念推广到了重积分．但实践不断地提出新的问题，如求不均匀的曲线形或曲面形物件的质量，求物体作曲线运动时变力所作的功，求流体流过一曲面时的流量等问题．把以前的积分概念用来解决这类问题已不尽合适，需要把积分概念进一步推广到第一型曲线、曲面积分，第二型曲线、曲面积分等积分概念．同时在这章中我们要把单变量微积分的基本定理——牛顿、莱布尼兹公式推广到多元的形式，这就是场论中的三个基本公式——格林公式、奥氏公式和斯托克斯公式．

第一节　第一型曲线积分

1.1　第一型曲线积分概念

设有一曲线形物件占有 xy 平面内一条曲线弧 L，它的两个端点是 A、B．在 L 上任意一点 (x, y) 处，它的线密度为 $\rho(x, y)$，当点在 L 上变动时，函数 $\rho(x, y)$ 在 L 上连续．我们的问题是要求这不均匀曲线形物件的质量 M（图 3-1）．

如果物件的线密度为常数，那么物件的质量就等于它的线密度乘以它的长度．现在物件各点处的线密度是变化的，就不能用上述方法来计算，为此我们仍采用已为读者熟知的"分割——求和——再求极限"的方法来解决．

用分点 $A_0=A, A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n=B$ 把曲线 L 分成 n 段，每一小段长度顺次记为 $\Delta l_1, \Delta l_2, \cdots, \Delta l_n$. 当 Δl_i 很短时，Δl_i 上的线密度 $\rho(x, y)$ 近似可看成不变，并等于 Δl_i 上某一点 (ξ_i, η_i) 处的值，从而 Δl_i 这一小段的质量近似等于

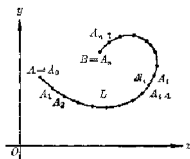


图 3-1

$$\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i,$$

因此得

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i.$$

为了得到准确值，我们令各小段的长度 Δl_i 都趋于零(记作 $\|\Delta l\|\to 0$). 对上式取极限，得到

$$M=\lim_{\|\Delta l\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i.$$

求不均匀曲线形物件的重心、转动惯量等问题时，也会遇到类似形式的极限，所以我们引进下面的定义.

定义 设函数 $f(x, y)$ 在平面的可求长曲线 L 上定义，A、B 是 L 的端点，用分点 $A_0=A, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n=B$ 把 L 分成 n 个小段，每个小段记作 $\Delta l_i=\widehat{A_iA_{i-1}}(i=1, 2, \cdots, n)$(记号 Δl_i 也表示各小段的长度)，又 (ξ_i, η_i) 为第 i 个小段 Δl_i 上的任意一点 $(i=1, 2, \cdots, n)$. 若极限

$$\lim_{\|\Delta l\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i$$

存在，则称极限值为函数 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的第一型曲线积分，记作

$$\int_L f(x, y)dl.$$

这里 $f(x, y)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段.

因此，不均匀曲线形物件的质量 M，等于线密度函数在 L 上的第一型曲线积分：

$$M=\int_L \rho(x, y)dl.$$

当 L 是一条闭曲线(即端点 A 与端点 B 重合)时，习惯上把 $f(x, y)$ 在 L 上的第一型曲线积分记作

$$\oint_L f(x, y)dl.$$

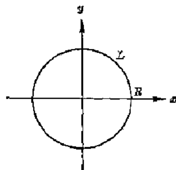


图 3-2

【例 1】 求第一型曲线积分

$$\oint_L x\,dl,$$

其中 L：$x^2+y^2=R^2$.

解：由图 3-2 可见，积分曲线为一圆周，它关于 y 轴对称，被积函数是奇函数，类似于第二章第一节的例 1，我们将左、右半个圆周关于 y 轴对称地进行分割、取点，这样得到的积分和为零，因此所求的线积分为零，即

$$\oint_L x\,dl=0.$$

【例 2】 求第一型曲线积分

$$\oint_L (x^2+y^2)dl,$$

其中 L：$x^2+y^2=R^2$.

解：把 L 分成 n 段，记为 $\Delta l_i(i=1, 2, \cdots, n)$，在每段上任取一点 (ξ_i, η_i)，作积分和

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2)\Delta l_i,$$

因点 (ξ_i, η_i) 在圆周 L 上，所以 $\xi_i^2+\eta_i^2=R^2$，即有

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2)\Delta l_i=R^2\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=2\pi R\cdot R^2,$$

从而得
$$\oint_L(x^2+y^2)dl=2\pi R^3.$$

这例说明，可以利用积分曲线 L 的方程，对被积函数进行化简，如

$$\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{dl}{x^2+y^2}=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{dl}{R^2}=\frac{1}{R^2}\oint_{x^2+y^2=R^2}dl$$
$$=\frac{1}{R^2}\cdot 2\pi R=\frac{2\pi}{R}.$$

这是因为积分变量 x、y 只在曲线 L 上取值，而以前遇到过的二重积分就没有类似的性质.

由定义我们可以证明（证明从略），若函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，或除去有限个点外函数在 L 上连续、有界，而 L 是逐段光滑曲线，则 $f(x,y)$ 在 L 上的第一型曲线积分一定存在. 设 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 在 L 上可积，则有下列性质：

1) $\int_L kf(x,y)dl=k\int_L f(x,y)dl$ （k 为常数）；

2) $\int_L[f(x,y)\pm g(x,y)]dl=\int_L f(x,y)dl\pm\int_L g(x,y)dl$；

3) 如果用 L 表示由曲线弧 L_1、L_2 合并而成的曲线弧 L_1+L_2，又 L_1，L_2 除了几个交点外不相重迭，那末有

$$\int_L f(x,y)dl=\int_{L_1}f(x,y)dl+\int_{L_2}f(x,y)dl.$$

上述三条性质由第一型曲线积分定义即可得出. 它的物理意义也是明显的. 第一条性质是说，若曲线形物件的密度增大 k 倍，则其质量也增大 k 倍；第二条性质是说，若有同形状的两个曲线形物件把它们迭放在一起，看成一个曲线形物件时，则它的质量等于原两个曲线形物件质量之和；第三条性

质是说，若有不同形状的两个曲线形物件把它们连接在一起，看成一个曲线形物件时，则它的质量等于原两个曲线形物件质量之和。

在第一型曲线积分定义中，积分和中每一项是函数在点(ξ_i, η_i)处的值乘以Δl_i，弧长Δl_i总是大于零，所以第一型曲线积分与曲线弧L的指向(即从A到B还是从B到A)无关，如果用L^-表示与L指向相反的同一曲线弧，那么

$$\int_{L^-} f(x, y)dl = \int_L f(x, y)dl.$$

这个性质与定积分的下列性质

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

不同。为了强调这一点，我们也称第一型曲线积分为函数对弧长的曲线积分。

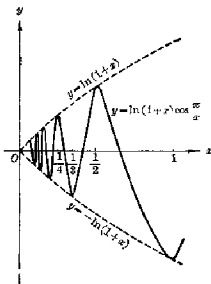


图 33

最后我们还想指出一点，在第一型曲线积分定义中要求曲线L有弧长存在。因为连续曲线可以没有长度，如区间$[0, 1]$上的连续曲线

$$y=\begin{cases}\ln(1+x)\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它的图形是夹在两条曲线$y=\ln(1+x)$与$y=-\ln(1+x)$之间，当动点由$x=1$跑向$x=0$时，曲线在上述两曲线间作来回摆动，越靠近原点时，摆动越厉害，振幅也越小，但

永远作无休止的摆动(图 3-3)．由图看出，曲线在

$$x=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\quad (n\text{ 为自然数})$$

处轮流与 $y=-\ln(1+x)$ 及 $y=\ln(1+x)$ 两曲线相接触，接触点的高度分别为

$$\ln(1+1),\ \ln\left(1+\frac{1}{2}\right),\ \ln\left(1+\frac{1}{3}\right),\ \cdots,\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \cdots.$$

取前 N 个高度求和得

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln n)=\ln N.$$

当 $N\to+\infty$ 时，这些高度之和无限变大，由此得出这条连续曲线长度为无穷大．因为如果曲线长度为有限，而所有高度之和总比曲线长度要小，这就得出所有高度和为一有限数，而这与已知高度和为无穷大相矛盾．

1.2 第一型曲线积分的计算

设给定平面曲线 L，它的参数方程为:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t).\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

设 $t=\alpha$ 对应的点称为起点，记作 A；$t=\beta$ 对应的点称为终点，记作 B．因第一型曲线积分与曲线 L 的方向无关，无妨设曲线 L 即为 $\overset{\frown}{AB}$．

还假定函数 $x(t)$、$y(t)$ 在区间 $[\alpha,\ \beta]$ 上连续可微，且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$．由第一章第六节知道曲线 L 在每一点有切向量

$$\boldsymbol{T}=(x'(t),\ y'(t))$$

存在，且切向量连续地转动，这种曲线我们称为*光滑曲线*．光滑曲线的长度一定存在，其长为

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

现在我们把积分

$$\int_L f(x,y)dl$$

理解成曲线形物件的质量．先把区间 $[\alpha,\beta]$ 分成 n 段，相应地把曲线 L 分成 n 段，取出典型的一段 Δl，它的主要部分或其微分为

$$dl=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,$$

相应地 Δl 段的质量 ΔM 的微元为

$$\begin{aligned}dM&=f(x(t),y(t))dl\\&=f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt,\end{aligned}$$

所以曲线形物件质量为：

$$M=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

由于不管用什么方法求得的质量应该一样，即得第一型曲线积分的计算公式：

$$\int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \tag{1.1}$$

可见，把第一型曲线积分化成定积分时，只要把被积函数中 x、y 用曲线参数方程代入，弧微分 dl 用

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

代入，再把小的参数 α 作下限，大的参数 β 作上限即成．

【例 3】 计算积分

$$\int_L \sqrt{y}\,dl,$$

其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上由原点到 $(1,1)$ 点之间的一段弧(图 3-4)．

解法一：把 x 看成参数，x 的变化范围为区间 $[0, 1]$，由公式(1.1)得

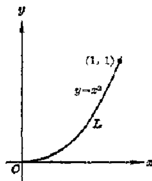


图 3-4

$$\int_L \sqrt{y}\, dl = \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+(2x)^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, d(1+4x^2)$$
$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

解法二：把 y 看成参数，抛物线的方程为 $x=\sqrt{y}$，y 的变化范围为区间 $[0, 1]$，由公式(1.1)得

$$\int_L \sqrt{y}\, dl = \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1+4y}\, dy = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

【例 4】 计算曲线积分

$$\int_L x dl,$$

其中 L 为用直线段联接点 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(1, 1)$的闭路(图 3-5).

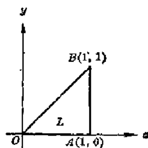


图 3-5

解：$\int_L x dl = \int_{OA} x dl + \int_{AB} x\, dl + \int_{BO} x\, dl.$

直线段 OA 的参数方程为：$x=x$，$y=0(0 \leqslant x \leqslant 1)$，所以

$$\int_{OA} x\, dl = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2};$$

直线段 AB 的参数方程为 $x=1, y=y(0\leqslant y\leqslant 1)$，所以

$$\int_{AB} x dl=\int_0^1 1 dy=1;$$

直线段 BO 的参数方程为 $x=x, y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，所以

$$\int_{BO} x dl=\int_0^1 x\cdot\sqrt{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此 $$\int_{L_1} x dl=\frac{1}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

【例5】 计算曲线积分

$$\int_L (x+y)dl,$$

其中 L 是以半径为 a，圆心在原点的右半个圆周(图3-6)。

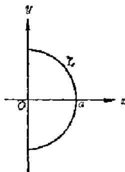


图 3-6

解：L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta.\end{cases}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

由于

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}d\theta=\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}d\theta$$
$$=a d\theta,$$

所以 $$\int_L (x+y)dl=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta+a\sin\theta)a d\theta=2a^2.$$

上面我们讨论了平面曲线积分，这些讨论完全可以搬到空间情形，建立空间第一型曲线积分的定义、性质与计算公式。设给定空间第一型曲线积分

$$\int_L f(x, y, z)dl,$$

曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \\ z=z(t). \end{cases}$$

则有

$$\int_L f(x,\ y,\ z)\,dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

【例 6】 计算曲线积分

$$\int_L z\,dl,$$

其中 L 为螺旋线

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi) \\ z=bt. \end{cases}$$

解：由公式得

$$\int_L z\,dl=\int_0^{2\pi} bt\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt$$

$$=b\int_0^{2\pi} t\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2b\sqrt{a^2+b^2}\,\pi^2.$$

习 题 一

1．计算下列曲线积分：

1) $\int_L (x+y)dl$，其中 L 是以 $O(0,\ 0)$，$A(1,\ 0)$ 和 $B(0,\ 1)$ 为顶点的三角形闭路；

2) $\int_L y^2 dl$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一拱；

3) $\int_L (x^2+y^2)dl$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

4) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$；

5) $\int_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$，其中 L 为内摆线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 的弧。

[提示：化到第一象限内来考虑。]

2. 计算下列曲线积分：

1) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$，其中 L 为螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段；

2) $\int_L x^2\,dl$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$。

$\left[\text{提示：作变换 } \xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z),\quad \zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(x+y+z).\right]$

3. 求曲线 $x=at$，$y=\frac{a}{2}t^2$，$z=\frac{a}{3}t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧之质量，其密度函数为 $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$。

第二节　第二型曲线积分

2.1　第二型曲线积分的概念

设有一质点在 xy 平面内，从 A 点沿着光滑（即有连续转动的切线）曲线弧 L 移动到 B 点，在移动过程中质点受到力

$$F(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

的作用，其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x、y 轴上的单位向量，方向与坐标轴正向一致，又

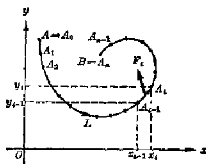


图 8-7

$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 均为曲线 L 上的连续函数。我们的问题是

求质点从 A 移动到 B 时，力 $\boldsymbol{F}$ 对它所作的功(图 3 7)．

我们知道当力为常向量 $\boldsymbol{F}$，质点作直线移动，若移动的位移向量为 $\boldsymbol{l}$，则 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}.$$

现在力 $\boldsymbol{F}$ 不是常向量，而是变向量，它的大小和方向在不同点可以不同；而且质点移动的路径不是直线，可以是任意光滑曲线．所以不能简单地用上述公式来计算变力所作的功．

为此，我们按 L 的指向用分点 $A=A_0(x_0, y_0)$，$A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，…，$A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$，$A_n(x_n, y_n)=B$ 把曲线 L 分成 n 段．取其中一小段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 来分析，由于 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 很短，可以用有向线段

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=\Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}$$

近似代替它，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$；又由于函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 的连续性，我们可以用 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任意一点 (ξ_i, η_i) 处的力

$$\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)=P(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i, \eta_i)\boldsymbol{j}$$

来近似代替小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上各点处的力．这样，质点沿着小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 从点 A_{i-1} 移动到点 A_i 时，变力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 ΔW_i 近似等于常力 $\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)$ 在质点移动过有向线段 $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 时所作的功，即

$$\Delta W_i\approx\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

通过求和，便得总功 W 的近似值

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i].$$

为了求出 W 的准确值，我们让每个小弧段的长度都趋于零(记作 $\|\Delta l\|\to 0$)，对上式取极限，得到

$$W=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i].$$

在其它问题中也会遇到类似的极限，所以我们引入下面的定义.

定义 设 L 为 xy 平面内从点 A 到点 B 的一条有向可求长的曲线弧，$P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$ 为给定在 L 上的函数. 按 L 的方向顺次用分点 $A=A_0(x_0,y_0)$，$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，…，$A_{n-1}(x_{n-1},\ y_{n-1})$，$A_n(x_n,\ y_n)=B$ 把 L 分成 n 个有向小弧段，设第 i 个小弧段上坐标 x、y 的增量依次为 Δx_i，Δy_i（$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$），又设 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 为 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任意一点，若极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i$$

存在，则称极限值为函数 $P(x,\ y)$ 在有向曲线 L 上关于坐标 x 的曲线积分，记作

$$\int_L P(x,\ y)dx=\int_{\overrightarrow{AB}}P(x,\ y)dx,$$

若极限
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i$$

存在，则称极限值为函数 $Q(x,\ y)$ 在有向曲线 L 上关于坐标 y 的曲线积分，记作

$$\int_L Q(x,\ y)dy=\int_{\overrightarrow{AB}}Q(x,\ y)dy.$$

在数学上我们可以单独讨论积分

$$\int_L P(x,\ y)\,dx \quad 与 \quad \int_L Q(x,\ y)dy,$$

但在应用上这两积分常常是结合在一起的，为了写起来方便，我们常把

$$\int_L P(x,\ y)dx+\int_L Q(x,\ y)dy$$

记作 $$\int_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

或 $$\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

其中 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{l}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}$.

上述关于坐标的曲线积分，称为第二型曲线积分. 有了这定义后，质点沿 L 移动时变力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功，就是力 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上的第二型曲线积分

$$W=\int_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

当积分曲线 L 是一封闭曲线时，习惯上把积分

$$\int_L P\,dx+Q\,dy$$

写成 $$\oint_L P\,dx+Q\,dy.$$

当函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在曲线 L 上连续，或除去有限个点外连续、有界；又曲线 L 是光滑曲线或是有限条光滑曲线连接而成(如多边形的边界，这种曲线称逐段光滑曲线). 这时第二型曲线积分就存在. 并具有下列性质：

1) $\int_L k(P\,dx+Q\,dy)=k\int_L P\,dx+Q\,dy$ (k 为常数)；

2) $$\int_L (P_1\pm P_2)dx+(Q_1\pm Q_2)dy$$
$$=\int_L P_1\,dx+Q_1\,dy\pm\int_L P_2\,dx\pm Q_2\,dy;$$

3) 如果用 L 表示有向曲线弧 L_1、L_2 合并组成的有向曲线弧 L_1+L_2，又设 L_1, L_2 除弧立点外不相重迭，那么有

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2} P\,dx+Q\,dy.$$

上面三条性质的物理意义是明显的. 第一条性质是说，

当力的大小增大 k 倍时，则作功也增大 k 倍；第二条性质是说，若质点移动时有两个力作用在质点上，则合力所作的功等于每个力所作的功之和；第三条性质是说，质点由 A 移动到 B，接着又由 B 移动到 C，则力所作的功等于每一段所作功之和.

如果用 L^- 表示与 L 完全重合但方向相反的曲线弧．那么在 L 与 L^- 有同样分割和取点的积分和中，其中函数 P、Q 的值对两者一样，而在 L 的积分和中乘的是小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的 x 增量 x_i-x_{i-1} 及 y 增量 y_i-y_{i-1}，在 L^- 的积分和中乘的应是小弧段 $\widehat{A_iA_{i-1}}$（注意曲线的方向决定小弧段的方向）的 x 增量 $x_{i-1}-x_i$ 及 y 增量 $y_{i-1}-y_i$，既然增量相差一个负号，因此整个积分和从而积分值也相差一个负号，所以有

$$\int_{L^-} P\,dx=-\int_L P\,dx,\quad \int_{L^-} Q\,dy=-\int_L Q\,dy,$$

或
$$\int_{L^-} P\,dx+Q\,dy=-\int_L P\,dx+Q\,dy.$$

这表明第二型曲线积分是有方向性的，它是区别于第一型曲线积分的重要特征．曲线积分的有向性与作功的概念是一致的，如果质点由 A 移动到 B 时，力 $\boldsymbol{F}$ 作了功，则质点由 B 沿原路移动到 A 时，质点就要克服力 $\boldsymbol{F}$ 作功，即力 $\boldsymbol{F}$ 作了负功.

第二型曲线积分的有向性，也可用起点与终点次序来说明，如

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=-\int_{BA} P\,dx+Q\,dy.$$

若曲线为一闭路，这时起点与终点重合，只能具体指明 L 的方向是两个可能方向中那一个方向．只要方向不变，计算闭路曲线积分时，可取闭路上任一点作为起点，曲线积分的值与起

点无关．例如图3-8中取闭路中 A 为起点及 B 为起点时，它们的积分值相同，因为有下式成立：

$$\begin{aligned}&\int_{AMBNA}P\,dx+Q\,dy\\&=\int_{AMB}P\,dx+Q\,dy+\int_{BNA}P\,dx+Q\,dy\\&=\int_{BNA}P\,dx+Q\,dy+\int_{AMB}P\,dx+Q\,dy\\&=\int_{BNAMB}P\,dx+Q\,dy.\end{aligned}$$

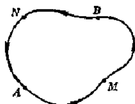


图 3-8

在平面情形，我们规定逆时针方向作为闭路的正向．以后若不特别声明闭路的方向时，总认为积分是沿闭路正向来取的，例如计算曲线积分

$$\int_L P\,dx+Q\,dy,$$

L 为一圆周：$x^2+y^2=a^2$．则按上述约定，L 的方向是逆时针方向．

2.2 第二型曲线积分的计算

在平面上给定光滑曲线 L，它的参数方程为：

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

设参数 $t=\alpha$ 对应于起点 A，参数 $t=\beta$ 对应于终点 B，假定参数增大的方向与曲线的方向一致，则切向量

$$\boldsymbol{T}=(x'(t),\ y'(t)),$$

与曲线 L 的方向一致．

现在讨论曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

的计算．我们把它理解成求力所作的功．先把区间 $[\alpha, \beta]$ 分成 n 段，相应地把曲线 $L=\widehat{AB}$ 分成 n 段，取出典型的一段进行分析．因 $dt>0$，有向小曲线段 $\Delta \boldsymbol{l}$ 的主要部分，或弧位移的微元素是

$$d\boldsymbol{l}=(x'(t), y'(t))\cdot dt.$$

相应地力在 $\Delta \boldsymbol{l}$ 上所作功 ΔW 的主要部分为

$$dW=[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)]dt,$$

所以所求的功为

$$W=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

由于不管用什么方法求得的功应该一样，即有

$$\int_{L}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t), y(t))x'(t)$$
$$+Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

这就是曲线积分的计算公式．

若参数 $t=\alpha$ 对应于终点 B，参数 $t=\beta$ 对应于起点 A，这时参数增大的方向与指定曲线的方向正好相反．为此考虑曲线 $L^{-}=\widehat{BA}$，对曲线 $\widehat{BA}$ 来说，参数增大的方向与曲线的方向一致，因此由上面讨论知

$$\int_{\widehat{BA}}(P\,dx+Q\,dy)$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)]dt,$$

由第二型线积分与定积分的有向性，即得：

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx+Q\,dy$$
$$=\int_{\beta}^{\alpha}[P(x(t), y(t))x'(t)+Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

可见，把第二型线积分化为定积分时，被积函数中的 x、y 用曲线的参数方程代入，dx、dy 用 $x'(t)dt$，$y'(t)dt$ 代入，然后把与起点对应的参数作为下限、与终点对应的参数作为上限即成。

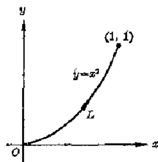


图 3 9

【例 1】 计算积分

$$\int_L \sqrt{y}\,dx \quad 与 \quad \int_L \sqrt{y}\,dy,$$

其中 L 是以原点为起点、以 $(1, 1)$ 点为终点的抛物线 $y=x^2$ 弧(图 3 9)。

解法一：把 x 看成参数，起点对应于 $x=0$，终点对应于 $x=1$，所以有

$$\int_L \sqrt{y}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^2}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$\int_L \sqrt{y}\,dy = \int_0^1 \sqrt{x^2}\cdot 2x\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

解法二：把 y 看成参数，则曲线 L 的方程为 $x=\sqrt{y}$，起点对应于 $y=0$，终点对应于 $y=1$，所以有

$$\int_L \sqrt{y}\,dx = \int_0^1 \sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2},$$

$$\int_L \sqrt{y}\,dy = \int_0^1 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}.$$

【例 2】 计算曲线积分

$$\int_L x\,dx + y\,dy,$$

其中 L：$x^2+y^2=a^2$(图 3 10)。

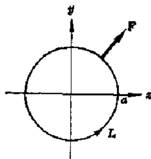


图 3 10

解：取 L 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta. \end{cases}$$

当 θ 由 0 增至 2π 时，与 L 的正向一致，所以有

$$\int_L x\,dx + y\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)+a\sin\theta\cdot(a\cos\theta)]dy=0.$$

这题可以给它一个物理解释．当质点沿圆周作逆时针移动时，它受到一个力

$$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

的作用，在圆周的每一点 (x, y)，力 $\boldsymbol{F}$ 就是该点的向径(即原点至该点的向量)，所以每一时刻力 $\boldsymbol{F}$ 总与质点的位移垂直，故作功为零．

【例 3】 计算曲线积分

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy,$$

其中 L 为 1) 折线 OAB; 2) 直线段 OB(图 3-11)．

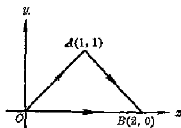


图 3-11

解：1)

$$\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$+\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy,$$

直线段 OA 的方程为 $y=x$，起点对应于 $x=0$，终点对应于 $x=1$，所以

$$\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(x^2+x^2)+(x^2-x^2)\cdot 1]dx=\frac{2}{3},$$

直线段 AB 的方程为 $y=-x+2$，起点对应于 $x=1$，终点对应

于 $x=2$. 所以

$$\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_1^2\{[x^2+(-x+2)^2]+[x^2-(-x+2)^2]\cdot(-1)\}dx$$

$$=\int_1^2 2(-x+2)^2dx=\left.-\frac{2}{3}(-x+2)^3\right]_1^2=\frac{2}{3},$$

因此 $\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\frac{4}{3}$.

2) 直线段 OB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x,\\ y=0,\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$$

所以 $$\int_{OB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^2[x^2+(x^2-0^2)\cdot 0]dx=\frac{8}{3}.$$

这例说明，曲线积分的值不仅与路径的起点和终点有关，还与路径本身有关，当路径不同时(尽管有相同起点和终点)，积分值可以不等.

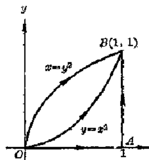


图 3-12

【例 4】 计算曲线积分

$$\int_L 2xy\,dx+x^2dy,$$

其中 L 为 1) 抛物线 $y=x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段; 2) 抛物线 $x=y^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段; 3) 有向折线 OAB, O、A、B 三点的坐标依次为 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$(图 3-12).

解: 1)

$$\int_L 2xy\,dx+x^2dy=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)\,dx=\int_0^1 4x^3dx=1;$$

2) $\int_{L_2} 2xy\,dx + x^2dy = \int_0^1 (2y^2\cdot y\cdot 2y + y^4)\,dy$

$= \int_0^1 5y^4\,dy = 1;$

3) $\int_{OAB} 2xy\,dx + x^2\,dy$

$= \int_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy + \int_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy$

$= \int_0^1 (2x\cdot 0 + x^2\cdot 0)\,dx + \int_0^1 (2\cdot 1\cdot y\cdot 0 + 1^2)\,dy$

$= \int_0^1 1dy = 1.$

这例说明，对有些函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$，它们的曲线积分值与路径的起点和终点有关，而与如何连接起点和终点的路径本身无关，以后我们还要详细地讨论这个问题。

【例 5】 计算曲线积分

$$\int_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

其中 L 为：$x^2+y^2=a^2$.

解：L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta. \end{cases}$$

当 θ 由 0 增至 2π 时，与曲线 L 的正向一致，所以有

$$\int_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin\theta)(-a\sin\theta) + a\cos\theta\cdot a\cos\theta}{a^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

这例说明，可以利用曲线的方程对被积函数进行简化. 如

例中分母可以直接换成 a^2，并提出积分号之外，只要对被积函数中所剩部分求积分即成.

本小节中以上的讨论对空间曲线积分同样适用. 设给定空间曲线 L 的参数方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \\ z=z(t). \end{cases}$$

参数 $t=\alpha$ 对应于起点，参数 $t=\beta$ 对应于终点，则曲线积分的计算公式为

$$\begin{aligned} &\int_L P dx+Q dy+R dz \\ =&\int_\alpha^\beta [P(x(t),\ y(t),\ z(t))x'(t) \\ &+Q(x(t),\ y(t),\ z(t))y'(t) \\ &+R(x(t),\ y(t),\ z(t))z'(t)]dt. \end{aligned}$$

2.3 两种类型曲线积分之间的联系

第一型与第二型曲线积分，从它们的定义来看是不同的，然而它们都是沿曲线积分，两者之间又有密切的关系，我们可以把一个第二型曲线积分化为第一型曲线积分，反之也一样.

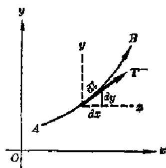


图 3-13

设给定第二型曲线积分

$$\int_L P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy,$$

曲线 L 的方向由 A 到 B(图 3-13). 由 L 的方向可以决定曲线 L 在每一点 $(x,\ y)$ 的切向量 $\boldsymbol{T}$，记该切向量的方向余弦为

$$\cos(t,\ x),\ \cos(t,\ y),$$

由图3 13看出，弧微分 dl 与 dx、dy 有关系式：

$$\frac{dx}{dl}=\cos(t,\ x),\quad \frac{dy}{dl}=\cos(t,\ y).$$

所以有

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L[P\cos(t,\ x)+Q\cos(t,\ y)]dl,$$

这就把关于坐标的曲线积分，变成关于弧长的曲线积分. 我们知道，第二型曲线积分是有方向性的，当 L 改变方向时积分值相应要变号，而第一型曲线积分是无方向性的，这样是否有矛盾呢？其实不然，当曲线改变方向时，曲线的切向量也随之改变方向，因而切向量的两个方向余弦也与以前的相差一个负号. 所以当 L 改变方向时，上式右端也相应产生一个负号，所以等式仍成立.

确切地说，如果上式右端把 $P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$ 看成被积函数，它仍是第二型曲线积分. 如果把 $P\cos(t,x)+Q\cos(t,y)$ 看成被积函数，则它是第一型曲线积分. 所谓把第二型曲线积分变为第一型曲线积分，是对不同的被积函数而言的.

习 题 二

1. 求下列曲线积分：

   1) $$\int_L xy\,dx+(y-x)dy,$$

   其中 L 是联接 $O(0,\ 0)$ 与 $A(1,\ 1)$ 的 a) 直线 $y=x$, b) 抛物线 $y=x^2$, c) 抛物线 $x=y^2$, d) 立方抛物线 $y=x^3$;

   2) $$\int_L (x-y^2)dx+2xy\,dy,$$

   其中 L 是 a) 联接 $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 1)$ 的直线段, b) 联接 $O(0,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $A(1,\ 1)$ 的折线段, c) 是联接 $O(0,\ 0)$, $C(1,\ 0)$,

$A(1, 1)$ 的折线段;

3) $$\int_L (y^2+2xy)dx+(2xy+x^2)dy,$$

其中 L 同上题;

4) $$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$$

其中 L 为抛物线 $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$;

5) $$\oint_L (x+y)dx+(x-y)dy,$$

其中 L 是: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

6) $$\int_L (2a-y)dx+x\,dy,$$

其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

7) $$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2},$$

L: $x^2+y^2=a^2$;

8) $$\oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|},$$

其中 $ABCDA$ 为以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形的闭路;

9) $$\int_{AB} \sin y\,dx+\sin x\,dy,$$

AB 为介于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段;

10) $$\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}},$$

L 是星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 自点 $A(a, 0)$ 到点 $B(0, a)$ 的一段.

2. 计算下列曲线积分:

1) $$\int_L y^2dx+xy\,dy+xz\,dz,$$

其中 L 是 a) 联接 $O(0, 0, 0)$ 与 $A(1, 1, 1)$ 的直线段, b) 联接 $O(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $A(1, 1, 1)$ 的折线段;

2) $$\int_L y\,dx-z\,dy+x\,dz,$$

其中 L 为螺线的一段：$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$。

3) $$\int_L (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2dz,$$

L 为 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3(0\leqslant t\leqslant 1)$；

4) $$\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,$$

其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，在第一卦限部分的边界线，方向由点 $A(1,0,0)$ 至 $B(0,1,0)$ 再至 $C(0,0,1)$。

[提示：分成三个线积分来考虑。]

第三节 第一型曲面积分

3.1 第一型曲面积分概念

设有一不均匀的曲面形物件，它在空间所占的位置为一曲面 S，在 S 上任一点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，函数 $\rho(x,y,z)$ 在 S 上连续，我们的问题是要求这曲面形物件的质量 M。

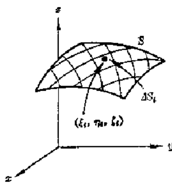


图 3-14

我们用 S 上的曲线网把 S 分成 n 个小块，记作 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$（同时也用这些记号表示小块的面积），当每一小块 ΔS_i 充分小时，ΔS_i 上的面密度 $\rho(x,y,z)$ 近似看成不变，并等于 ΔS_i 上某一点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 处的值（图 3-14），从而这一小块 ΔS_i 的质量近似等于

$$\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

因此得
$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

为了得到准确值，令各小块都收缩成一点(记作 $\Delta S_i\to 0$)，对上式取极限，即得

$$M=\lim_{|\Delta S_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta S_i.$$

定义 设函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在可求面积的曲面 S 上定义，把曲面 S 分成 n 个小块 $\Delta S_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$(同时也用它表示小块的面积)，又 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$ 为 ΔS_i 上任意一点，若极限

$$\lim_{|\Delta S_i|\to 0}f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta S_i$$

存在，则称极限值为函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在曲面 S 上的第一型曲面积分，记作

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dS.$$

这里 $f(x,\ y,\ z)$ 叫做**被积函数**，S 叫做**积分曲面**。

按定义，不均匀曲面形物件的质量 M，等于面密度函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在 S 上的第一型曲面积分，

$$M=\iint_S f(x,\ y,\ z)dS.$$

当 S 为一封闭曲面时，习惯上把 $f(x,\ y,z)$在 S 上的第一型曲面积分记作

$$\oint\!\!\!\oint_S f(x,\ y,\ z)dS.$$

【例 1】 计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_S xdS,$$

其中 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解：由于积分曲面 S 关于 yz 平面对称，被积函数是 x 的奇函数，采用关于 yz 平面对称的分割和取点，可以由定义看

出

$$\oiint_S x dS = 0.$$

第一型曲面积分有下列性质：

1) $\iint_S kf(x, y, z)dS = k\iint_S f(x, y, z)dS$ (k 为常数)；

2) $\iint_S [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]dS$

$$= \iint_S f(x, y, z)dS \pm \iint_S g(x, y, z)dS;$$

3) 如果用 S 表示曲面 S_1, S_2 合并组成的曲面片 S_1+S_2，又 S_1, S_2 除了有限条线外不相重迭，那么有

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)dS + \iint_{S_2} f(x, y, z)dS.$$

在第一型曲面积分的定义中，积分和中每一项是函数在点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的值乘以 ΔS_i。因为面积 ΔS_i 总是大于零，所以第一型曲面积分是无方向性的积分。

注意在曲面积分定义中，我们要求曲面 S 是可求出面积（即面积为一有限值）的曲面。如果 S 仅只是一张连续曲面，则不能保证它的面积为有限值。例如区间 $[0, 1]$ 上的连续函数

$$y = \begin{cases} \sqrt{\ln(1+x)} \cos\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

绕 x 轴旋转所得的曲面为一连续曲面。由本章第一节知道这曲线与 $y = -\sqrt{\ln(1+x)}$, $y = \sqrt{\ln(1+x)}$ 相接触的高度依次为：

$$\sqrt{\ln(1+1)}, \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)}, \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)}, \cdots,$$

这些高度线段旋转后为一系列圆盘，其面积分别为

$$\pi\ln(1+1),\ \pi\ln\left(1+\frac{1}{2}\right),\ \pi\ln\left(1+\frac{1}{3}\right),\ \cdots$$

由直观看出，若旋转曲面面积存在，则应大于各高度线段旋转所得圆盘面积之和，而后者为一无限大，故曲面面积不存在.

3.2 第一型曲面积分的计算

设曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,\ v); \\ y=y(u,\ v); \\ z=z(u,\ v), \end{cases}$$

给出，函数 $x(u,\ v)$，$y(u,\ v)$，$z(u,\ v)$ 在 uv 平面区域 $\triangle$ 上连续可微，令

$$A=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)},\ B=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)},\ C=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)},$$

并设在 $\triangle$ 上有 $A^2+B^2+C^2\neq 0$. 上面条件保证了曲面 S 在每一点有法向量

$$\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$$

存在，且法向量连续转动，这种曲面我们称为光滑曲面. 由第二章第五节知光滑曲面的面积一定存在，并可表示为

$$S=\iint\limits_{\triangle}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv.$$

现在我们把要求的曲面积分

$$\iint\limits_{S}f(x,\ y,\ z)dS.$$

我们可以把它想象成求曲面形物件的质量 M. 先把区域 $\triangle$ 分成许多小矩形，相应地把曲面 S 分成许多小块. 任取一块 ΔS 进行分析，这一小块面积的主要部分或面积微元为

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv,$$

所以这一小块 ΔS 的质量 ΔM 的主要部分为

$$dM=f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv,$$

因此

$$M=\iint f[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

由于不管用什么方法求得的质量应该一样，即得曲面积分计算公式：

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$$
$$=\iint f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

可见，只要把被积函数中的 x、y、z 用曲面的参数方程代入，把面积微元 dS 用 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$ 代入，即可把曲面积分化为二重积分.

若曲面 S 的方程由

$$z=z(x,y)$$

给出，且函数 $z(x,y)$ 在区域 D 上连续可微. 这时我们可把它看成参数方程的特殊情形，只是其中参变数为 x、y，所以

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=-z'_x,\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=-z'_y,\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1,$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2},$$

因此，这时曲面积分的计算公式为：

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$$
$$=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy.$$

【例 2】 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS,$$

其中 S 是球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解：由被积函数与曲面的对称性，所求积分等于两倍上半球面 S_1 上的积分，即

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = 2\iint_{S_1} (x^2+y^2+z^2)dS,$$

因 S_1 的方程为

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

从而 $$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

所以 $$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy,$$

曲面 S_1 在 xy 平面上的投影区域 D 为：$x^2+y^2\leqslant a^2$，由曲面积分计算公式得

$$\begin{aligned}&\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS\\&=\iint_D (x^2+y^2+a^2-x^2-y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy\\&=\iint_D \frac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{a^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr\\&=-\pi a^3\int_0^a\frac{d(a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}}=-\pi a^3\left[2\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a=2\pi a^4,\end{aligned}$$

所以 $$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS=4\pi a^4.$$

这题若利用曲面的方程式先将被积函数化简，其结果立即可得

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = a^2\iint_S dS = a^2\cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^4.$$

【例 3】 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS,$$

其中 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=2az$.

解：记上半球面为 S_1，下半球面为 S_2．S_1 的方程为

$$z=a+\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

由上题知 $dS=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\,dy=\dfrac{a}{z-a}dx\,dy,$

再利用曲面方程，对被积函数化简得：

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS=\iint_{S_1}2az\,dS$$

$$=\iint_{S_1}2a(z-a)dS+\iint_{S_1}2a^2dS,$$

上式是对被积函数加减一数 $2a^2$，其积分值不变．对上述等式右端的两个曲面积分分别计算，可得

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}2a(z-a)\cdot\frac{a}{z-a}\,dx\,dy+\iint_{S_1}2a^2dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2}2a^2dx\,dy+\iint_{S_1}2a^2\,dS$$

$$=2a^2\cdot\pi a^2+2a^2\cdot 2\pi a^2=6\pi a^4.$$

同理可得

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2+z^2)dS=-2a^2\cdot\pi a^2+2a^2\cdot 2\pi a^2=2\pi a^4.$$

所以
$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = 8\pi a^4.$$

【例 4】 计算曲面积分
$$\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS.$$

其中 S 为椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

解：利用曲面的参数方程来求积分．椭球面的参数方程为：
$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta, \\ y=b\sin\varphi\sin\theta, \\ z=c\cos\varphi. \end{cases}$$

而参数 φ, θ 的活动范围 $\triangle$ 为：$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$．这样
$$A=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$
$$B=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$
$$C=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以
$$dS=abc\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi,$$

另一方面，被积函数为
$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}},$$

因此可得

$$\iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS$$

$$=\iint_{\wedge} abc\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}abc\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\cdot\sin\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}abc\left(\frac{4\cos^2\theta}{3a^2}+\frac{4\sin^2\theta}{3b^2}+\frac{2}{3c^2}\right)d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

如同第二章第五节，现在我们可以求一曲面形物件对其外一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处单位质量的引力．若曲面形物件的面密度为 $\rho(x, y, z)$，则引力的三个分量为(图 3-15)

$$F_x=K\iint_S\frac{\rho(x, y, z)(x-x_0)}{r^3}dS,$$

$$F_y=K\iint_S\frac{\rho(x, y, z)(y-y_0)}{r^3}dS,$$

$$F_z=K\iint_S\frac{\rho(x, y, z)(z-z_0)}{r^3}dS.$$

其中 K 为比例常数，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

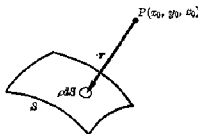


图 3-15

【例 5】 求密度为 ρ 的均匀球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 对位于 $P(0, 0, l)\,(l\neq R)$ 处单位质量的引力(图 3-16)．

解．由对称性知

$$F_x=F_y=0,$$

故只需求分量 F_z，而

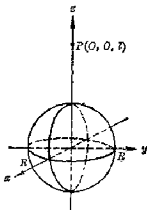


图 3-10

$$F_z = K\rho \iint_S \frac{z-l}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}} dS.$$

我们用参数方程来求此面积分. 因球面的参数方程为:

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi. \end{cases}$$

参数变化区域 $\triangle$ 为:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \quad 与 \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

又有

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = -R^2 \sin^2\varphi \cos\theta,$$

$$B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \varphi)} = -R^2 \sin^2\varphi \sin\theta,$$

$$C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = -R^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

所以

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi.$$

另一方面, 被积函数为

$$\frac{z-l}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}} = \frac{R\cos\varphi - l}{(R^2+l^2-2Rl\cos\varphi)^{3/2}},$$

因此

$$F_z = K\rho \iint_{\triangle} \frac{R\cos\varphi - l}{(R^2+l^2-2Rl\cos\varphi)^{3/2}} \cdot R^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 K\rho \int_0^{\pi} \frac{(R\cos\varphi - l)\sin\varphi \, d\varphi}{(R^2+l^2-2Rl\cos\varphi)^{3/2}}$$

$$= 2\pi R^2 K\rho \cdot \left[-\frac{1}{Rl} \int_0^{\pi} (R\cos\varphi - l) \cdot d(R^2+l^2-2Rl\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$
=2\pi R^2 K\rho\cdot\left[-\frac{R\cos\varphi-l}{Rl\sqrt{R^2+l^2-2Rl\cos\varphi}}\Big|_0^\pi\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{Rl}\int_0^\pi\frac{d(R\cos\varphi)}{\sqrt{R^2+l^2-2Rl\cos\varphi}}\right]
$$

$$
=2\pi R^2 K\rho\left[\frac{1}{Rl}+\frac{R-l}{Rl|R-l|}\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{Rl^2}(R^2+l^2-2Rl\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^\pi\right]
$$

$$
=2\pi R^2 K\rho\left[\frac{1}{Rl}+\frac{R-l}{Rl|R-l|}-\frac{R+l}{Rl^2}+\frac{|R-l|}{Rl^2}\right]
$$

$$
=\begin{cases}-K\dfrac{4\pi R^2\cdot\rho}{l^2}, & 当\ l>R,\\ 0, & 当\ 0<l<R.\end{cases}
$$

结果表明，当质点 P 位于球内时，不受到球面的任何引力；当质点 P 位于球外时，质点所受到的引力与把球面的质量 $4\pi R^2\rho$ 全部集中到球心时，质点 P 所受到的引力一样.

习　题　三

1．计算下列曲面积分：

1) $\iint\limits_S(x+y+z)dS$，S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $z\geqslant0$；[提示：先利用对称性化简.]

2) $\iint\limits_S(x^2+y^2)dS$，$S$ 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant1$ 的边界；[提示：S 由锥面及平面组成.]

3) $\iint\limits_S\dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$，$S$ 为四面体 $x+y+z\leqslant1$ 与 $x\geqslant0$ 与 $y\geqslant0$ 与 $z\geqslant0$ 的边界；

4) $\iint\limits_S(xy+yz+zx)dS$，$S$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=$

$2ax$ 所割下的部分.

2. 计算下列曲面积分

1) $\iint\limits_S z\,dS$, S 为螺旋面 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ $(0\leqslant u\leqslant a$, $0\leqslant v\leqslant 2\pi)$ 的一部分;

2) $\iint\limits_S z^2 dS$, S 为圆锥表面 $x=\rho\cos\theta\sin\alpha$, $y=\rho\sin\theta\sin\alpha$, $z=\rho\cos\alpha$ $(0\leqslant\rho\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 的一部分, 其中 α 为常数 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 求一段圆柱面 S: $x^2+y^2=R^2$ 与 $0\leqslant z\leqslant h$ 对原点处单位质量的引力 $(\rho=1)$.

第四节　第二型曲面积分

4.1 曲面的侧

第二型曲面积分是有方向性的积分. 但曲面的定向要比曲线的定向复杂得多, 一条曲线总可规定一方向, 而曲面能否规定它的方向, 怎么规定它的方向, 都不是明显的事情, 需要加以专门的讨论.

在日常生活中, 我们所见到的曲面总可以分出它的两面. 如一张纸, 我们可以谈它的上面与下面、前面与后面、正面与反面等. 一件衣服, 我们可以讲它的外面与里面. 这就是说: 一个曲面总可以分出两侧. 对于有两侧的曲面, 若用颜料来涂这个曲面, 我们可以使曲面的一侧涂上一种颜色, 曲面的另一侧涂上另一种颜色, 而这两种颜色永远不会碰头. 所以我们可用不同的颜色来表示曲面的两侧.

那么是否有不能分出两侧的曲面呢? 有的. 所谓麦比乌斯带就是单侧曲面的一个典型例子. 麦比乌斯带构造如下: 将长方形纸条 $ABCD$ 先扭转一次, 然后将 B 与 D, 及 A 与 C 粘合

起来(图3 17)，构成的环带即为麦比乌斯带. 这个环带就是一单侧曲面，要想分出它的正、反两面那是徒劳的，因为若用颜料涂这个环带，可以不越过带的边缘而涂遍带的全部.

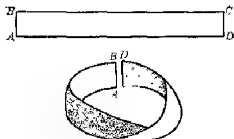


图 3-17

上面对曲面的侧只是一种直观的描述，怎样确切地定义曲面的侧呢？在曲线情形，我们用起点和终点来规定曲线的方向，也可用曲线的切向量规定曲线的方向. 对曲面自然想到用法向量来规定曲面的侧. 我们再来分析一下麦比乌斯带的特点，设取定 AB 线段的中点 M_0，并取定 M_0 处法向量的一个朝向，当动点 M 从 M_0 出发，沿带的中线运行时，法向量的方向也连续地变动，而且保持每一时刻都是曲面在 M 点的法向量. 当 M 循行一圈又回到 M_0 时，可以发现最后的法向量朝向与出发时的法向量朝向正好相反. 而双侧曲面就找不出这种点 M_0 和这种过 M_0 的闭路，使法向量由 M_0 出发循行闭路一圈后又回到 M_0 时，其朝向正好相反. 这样我们就有下列定义.

定义 给定光滑曲面 S，对 S 上任意一点 M_0，并取定 M_0 点法向量的一个方向，对于 S 上任何一条过 M_0 且不越过 S 边缘的闭路 L，当动点从 M_0 出发沿 L 运动时，使 M 点的法向量方向连续地变化，若 M 点回到 M_0 时，法向量的方向与出发时方向相同，则称曲面 S 为**双侧曲面**，否则称为**单侧曲面**.

对双侧曲面 S，在点 M_0 处的法向量朝向取定后，任何其

它点 M_1 处的法向量朝向，可取为由点 M_0 处法向量朝向连续变来的方向，所以点 M_1 处法向量的朝向也随之而定．因为动点 M 从 M_0 出发，不管沿 S 上什么曲线运动到 M_1，所得的法向量朝向应该一样．如果动点 M 分别沿 L_1 与 L_2 运行到 M_1 所得的法向量朝向正好相反(图 3-18)，则考虑由 M_1 出发的闭路 L_1+L_2，当动点由 M_1 出发又回到 M_1 时，最后法向量的朝向与出发时的法向量朝向正好相反，这与 S 是一双侧曲面的定义矛盾．所以对双侧曲面，只要取定一点的法向量朝向，其它各点的法向量朝向也随之而定．

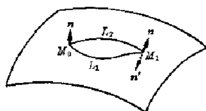


图 3-18

怎么具体来取定曲面的侧或曲面的定向呢？设曲面 S 由方程

$$z=z(x,\ y)$$

给出，函数在 D 上有连续的偏导数，由第一章第四节知曲面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm(-z'_x,\ -z'_y,\ 1).$$

若要表示曲面 S 的上侧，这时法向量应向上，即第三个分量应大于零，所以取"＋"号得到的法向量

$$\boldsymbol{n}=(-z'_x,\ -z'_y,\ 1),$$

即表示曲面 S 的上侧；若要表示曲面 S 的下侧，这时法向量应向下，即第三个分量应小于零，所以取"－"号得到的法向量

$$\boldsymbol{n}=(z'_x,\ z'_y,\ -1)$$

即表示曲面 S 的下侧．

设曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v) \end{cases}$$

给出，函数在 uv 的区域 Δ 上连续可微，令

$$A=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)},\ B=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)},\ C=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)},$$

由第一章第五节知曲面 S 的法向量为：

$$\boldsymbol{n}=\pm(A,\ B,\ C).$$

若要表示曲面 S 的外侧，只要任取 S 上一点，根据外侧时该点法向量的某一分量应大于零还是小于零，即可决定正负号的选取.

4.2 第二型曲面积分概念

对双侧曲面，我们可以建立第二型曲面积分的概念.

设河水在河道内流动．河道内每一点都有一水流速度向量 $\boldsymbol{V}(x,\ y,\ z)$，在河道内不同的点，水流速度向量的大小和方向可以不同．设河水流动是稳定的，即各点的水流速度不随时间而变化．在上述假定下，设想河道内有一双侧曲面 S，我们的问题要求河水流过曲面 S 的流量.

首先取定曲面的一侧，即曲面两个法向中的一个方向，以这个方向为标准，当水流速度与取定的法向量夹角小于 $90°$ 时，流量算作正的．当水流速度与取定的法向量夹角大于 $90°$ 时，流量算作负的．这样一来，流过 S 的流量就有明确的涵义．显然，若 S 为一封闭曲面，不管取 S 的内侧还是外侧，总的流量一定为零．若 S 为一非封闭曲面，这时流量 q 是客观存在的．但怎么求出 q 呢？

为此我们把曲面 S 分割成许多小块，记为 $\Delta S_i(i=1,\ 2,$

$\cdots, n$)(同时也用这些记号表示小块的面积)，当 ΔS_i 图形充分小时，近似可以把它看成一小块平面，速度向量 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ 也可以近似认为在 ΔS_i 上为一常向量，并用 ΔS_i 上任一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的值

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{V}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

表示这个常向量．这样单位时间内流过 ΔS_i 的水量形成一个以 ΔS_i 为底，以 $\boldsymbol{V}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的长度为斜高的斜柱体(图3-19)．设水的密度为1，并记 $\boldsymbol{n}_i$ 为点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的按曲面规定方向的单位法向量，则单位时间内流过 ΔS_i 的水量近似为

图 3-19

$$\text{密度}\times\text{体积}=1\times\text{底}\times\text{高}=\Delta S_i\cdot(\boldsymbol{V}_i\cdot\boldsymbol{n}_i)$$
$$=\boldsymbol{V}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i.$$

单位时间内流过曲面 S 的流量 q 近似为：

$$q\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i.$$

为了求出准确值，令 $|\Delta S|\to0$，对上式取极限，即得

$$q=\lim_{|\Delta S|\to0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{V}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\Delta S_i.$$

在其它问题中也会遇到类似的极限，所以我们引进下面的定义．

定义 设给定光滑(或逐片光滑)的双侧曲面 S，并取定曲面 S 的一侧，用单位法向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

来表示给定的侧．又在曲面 S 上给定向量函数

$$\boldsymbol{F}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

把曲面 S 分割成 n 个小块，记为 $\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$（同时也用这些记号表示小块的面积），在每个 ΔS_i 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，若极限

$$\lim_{\|\Delta S\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$
$$=\lim_{\|\Delta S\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i$$
$$+R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

存在，则称极限值为函数 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ 在曲面 S 上第二型曲面积分，记作

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

或
$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS \quad \left(\text{或}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\right).$$

$\boldsymbol{F}$ 或分量 P、Q、R 称为被积函数，指定侧的曲面 S 称为积分曲面.

按定义，单位时间内流过曲面 S 的流量，就是流速函数 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第二型曲面积分，即

$$q=\iint_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

其中 P、Q、R 是速度 $\boldsymbol{V}$ 的三个分量. 若 $q>0$，总的来说水流是按取定的法向量方向流动；若 $q<0$，总的来说水流是按取定的法向量相反的方向流动.

当曲面 S 为封闭曲面时，通常规定外侧作为曲面的正方向. 若不指明曲面的定向时，就理解成沿外侧的积分，并记作

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

或 $$\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

第二型曲面积分有下列性质:

1) $$\iint_S k(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=k\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS\ (k\ 为常数);$$

2) $$\iint_S [(P_1\pm P_2)\cos\alpha+(Q_1\pm Q_2)\cos\beta+(R_1\pm R_2)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_S (P_1\cos\alpha+Q_1\cos\beta+R_1\cos\gamma)dS$$

$$\pm\iint_S (P_2\cos\alpha+Q_2\cos\beta+R_2\cos\gamma)dS;$$

3) 如果 S 表示定向曲面 S_1, S_2 合并组成的定向曲面 S_1+S_2, S_1, S_2 除有限条线外不相重迭, 则

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{S_1} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$+\iint_{S_2} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

由定义可以看出, 曲面从一侧变到另一侧时, 法向量的朝向正好相反, 因而法向量的方向余弦差一负号, 曲面积分也随之差一负号. 所以第二型曲面积分是有方向性的.

与第二型曲线积分

$$\int_L (Pdx+Qdy)=\int_L [P\cos(t,\ x)+Q\cos(t,\ y)]dl$$

比较，我们还要引入曲面积分另一种记号．由第二章第五节知道，若 ΔS_i 近似看成平面块，则

$$\cos\alpha_i\Delta S_i,\ \cos\beta_i\Delta S_i,\ \cos\gamma_i\Delta S_i$$

分别是 ΔS_i 在 yz 平面、zx 平面、xy 平面上投影的面积，现在投影面积是带正负号的：若法向量 $\boldsymbol{n}_i$ 与 z 轴正向夹角小于 $90°$，即 $\gamma_i<90°$ 时，则 $\cos\gamma_i\Delta S_i>0$；若法向量 $\boldsymbol{n}_i$ 与 z 轴正向夹角大于 $90°$，即 $\gamma_i>90°$ 时，则 $\cos\gamma_i\Delta S_i<0$．这种投影称为有向投影．用 dS 表示面积 ΔS 的微元，用 $dy\,dz$，$dz\,dx$，$dx\,dy$ 分别表示 ΔS 在 yz 平面、zx 平面、xy 平面上有向投影的面积微元，则

$$dy\,dz=\cos\alpha\,dS,\ dz\,dx=\cos\beta\,dS,\ dx\,dy=\cos\gamma\,dS.$$

这样第二型曲面积分也常写成

$$\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

4.3 第二型曲面积分的计算

在第二型曲面积分中，是把 P、Q、R 看成被积函数，若把 $P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$ 看成被积函数，它就是第一型曲面积分，所以会计算第一型曲面积分也就会计算第二型曲面积分．我们先看一个非常特殊的例子．

【例 1】 计算曲面积分

$$\oiint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧．

解：由第一章第五节知曲面 $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ 的法向

量 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\boldsymbol{N}=(2x,\ 2y,\ 2z).$$

考虑上半球面一点 $(x,\ y,\ z)$. 因该点在上半球面，所以 $z>0$，因面法向量的第三个分量大于零，即上述法向量 $\boldsymbol{N}$ 就表示曲面外侧的法向量.

把这个法向量单位化，并注意 $x^2+y^2+z^2=a^2$，得到

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{a},\ \frac{z}{a}\right),$$

所以

$$\iint_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=\iint_S\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{a}\right)dS$$

$$=\iint_S \frac{a^2}{a}\,dS=a\iint_S dS=a\cdot 4\pi a^2=4\pi a^3.$$

这题我们是先求出指定法向量的方向余弦，然后把第二型曲面积分化为第一型曲面积分时，发现恰好是一个非常简单的第一型曲面积分，所以这种做法显得很简单. 一般来说先求方向余弦，然后再求第一型曲面积分并不简单，而是把这两步合并起来，直接把第二型曲面积分化为一个二重积分更方便.

设给定曲面 S 的方程是

$$z=f(x,\ y),$$

函数 $f(x,\ y)$ 在 D 上有连续偏导数. 则由

$$\cos\alpha=\frac{-f'_x}{\pm\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},$$

$$\cos\beta=\frac{-f'_y}{\pm\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}},$$

及 $dS=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy$，可得

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\pm\iint_D [P(x,\ y,\ f(x,\ y))(-f_x'(x,\ y))$$

$$+Q(x,\ y,\ f(x,\ y))(-f_y'(x,\ y))$$

$$+R(x,\ y,\ f(x,\ y))\cdot 1]dx\,dy.$$

若指定曲面的侧为上侧，公式前取"+"号；若指定曲面的侧为下侧，公式前取"−"号．根据这个公式，求第二型曲面积分时，不必算法向量的方向余弦，只要求出法向量

$$N=\pm(-f_x',\ -f_y',\ 1),$$

且上侧取正号，下侧取负号．然后把积分中 $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ 换成 N 的分量，dS 换成 $dxdy$ 即成．

【例 2】 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy),$$

其中 S 为如图 3-20 所示的三角形 ABC，方向向上。

解：曲面 S 的方程为

$$x+y+z=1$$

或 $$z=1-x-y,$$

S 在 xy 平面上的投影区域 D 为：$x\geqslant0$ 与 $y\geqslant0$ 与 $x+y\leqslant1$．曲面 S 的上侧法向量 N 为

$$N=(-z_x',\ -z_y',\ 1)$$

$$=(1,\ 1,\ 1),$$

所以

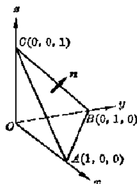


图 3-20

$$\iint_S (x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy)$$

$$= \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iint_D [x^2 + y^2 + (1-x-y)^2]\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y)\,dy = \frac{1}{6}.$$

【例 3】 计算曲面积分

$$\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy,$$

其中 S 为锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z(0\leqslant z\leqslant R)$ 的下侧(图 3-21).

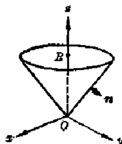


图 3-21

解：这题中被积函数 $P=Q=0$，$R=x^2y^2z$，积分曲面 S 在 xy 平面上的投影区域为 D：

$$x^2+y^2\leqslant R^2,$$

曲面下侧的法向量为

$$N=(z'_x,\ z'_y,\ -1),$$

代入被积表达式得

$$\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy = \iint_S x^2y^2z\cos\gamma\,dS$$

$$= \iint_D x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}\cdot(-1)\,dx\,dy$$

$$= -\iint_D x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \gamma^6 \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\gamma = -\frac{\pi}{28}R^7.$$

若曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u, v), \\ y=y(u, v), \\ z=z(u, v) \end{cases}$$

给出，函数在 uv 平面区域 $\triangle$ 上具有连续偏导数，令

$$A=\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},\ B=\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},\ C=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

则曲面 S 的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\pm(A, B, C),$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

及 $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$，所以

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

$$=\pm\iint_{\triangle}[PA+QB+RC]du\,dv.$$

可见，只要把被积函数 P、Q、R 中的 x、y、z 用曲面参数方程代入，把 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 换成对应法向量的分量，dS 换成 $du\,dv$ 即成．正负号根据曲面的侧来决定．

【例 4】 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy,$$

其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解：曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a+R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=b+R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=c+R\cos\varphi. \end{cases}$$

参数的变化区域 $\triangle$ 为：$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 且

$$A=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-R^2\sin^2\varphi\cos\theta,$$

$$B=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-R^2\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$C=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-R^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

考虑上半球面任一点，这时 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，有 $C<0$，所以外侧法向量 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} &= -(A,\ B,\ C) \\ &= R^2(\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\varphi). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS \\ &= \iint_{\triangle} [(a+R\sin\varphi\cos\theta)^2\cdot R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ &\quad + (b+R\sin\varphi\sin\theta)^2\cdot R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ &\quad + (c+R\cos\varphi)^2\cdot R^2\sin\varphi\cos\varphi]d\theta d\varphi \\ &= R^2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}(a^2\sin^2\varphi\cos\theta+2aR\sin^3\varphi\cos^2\theta \\ &\quad + R^2\sin^4\varphi\cos^3\theta+b^2\sin^2\varphi\sin\theta+2bR\sin^3\varphi\sin^2\theta \\ &\quad + R^2\sin^4\varphi\sin^3\theta+c^2\sin\varphi\cos\varphi+2cR\sin\varphi\cos^2\varphi \\ &\quad + R^2\sin\varphi\cos^3\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

由于

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta=0$$

和 $\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi=0$，上式可化为

$$I=R^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(2aR\sin^3\varphi\cos^2\theta+2bR\sin^3\varphi\sin^2\theta+2cR\sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$=2\pi R^3\int_0^{\pi}(a\sin^3\varphi+b\sin^3\varphi+2c\sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$=4\pi R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3\varphi+b\sin^3\varphi+2c\sin\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

【例 5】 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^3dy\,dz+y^3dz\,dx+z^2dx\,dy,$$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

解：曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta,\\ y=b\sin\varphi\sin\theta,\\ z=c\cos\varphi,\end{cases}$$

参数变化区域 Δ 为：$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 与 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 且

$$A=\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$

$$B=\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$C=\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\theta,\ \varphi)}=-ab\sin\varphi\cos\varphi.$$

所以曲面外侧的法向量 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}&=-(A,\ B,\ C)\\&=(bc\sin^2\varphi\cos\theta,\ ac\sin^2\varphi\sin\theta,\ ab\sin\varphi\cos\varphi).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_S(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,dS\\&=\iint\limits_\Delta(a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta\cdot bc\sin^2\varphi\cos\theta\\&\qquad+b^3\sin^3\varphi\sin^3\theta\cdot ac\sin^2\varphi\sin\theta\\&\qquad+c^3\cos^3\varphi\cdot ab\sin\varphi\cos\varphi)\,d\theta\,d\varphi\\&=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta+b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta\\&\qquad+c^2\sin\varphi\cos^4\varphi)\,d\varphi,\end{aligned}$$

利用 $\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\,d\varphi=2\cdot\frac{4\cdot2}{5\cdot3\cdot1}=\frac{16}{15}$，故

$$I=abc\int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{15}\,a^2\cos^4\theta+\frac{16}{15}\,b^2\sin^4\theta+\frac{2}{5}\,c^2\right)d\theta$$

再利用

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta&=\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta\\&=4\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi,\end{aligned}$$

最后得 $$I=\frac{4}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$

我们把上面解题步骤总结如下：

第一步：写出曲面的参数方程，并求出参数变化的区域；

第二步：求出法向量 $\boldsymbol{N}=\pm(A,\ B,\ C)$，任取一点，根据指定的曲面侧，决定正负号的选取，只要在这点法向量 $\boldsymbol{N}$ 与指定的侧符合，那么其它点的法向量 $\boldsymbol{N}$ 也必定与指定的侧符合；

第三步：把 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 换成取定的法向量 N 的分量，dS 换成 $\triangle$ 上的面积微元，然后再求一个二重积分。

习 题 四

1 计算下列曲面积分：

1) $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$，其中 S 是长方体：$0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant b$ 与 $0\leqslant z\leqslant c$ 的表面，曲面的定向取外法线方向；

2) $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$，其中 S 是圆锥曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面；

3) $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$，其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx(R>r>0)$ 截下部分的上侧。

[提示：化到第一型曲面积分，并利用对称性化简。]

2 计算下列曲面积分

1) $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$，其中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k^2$ 的外侧；

2) $\iint\limits_S \frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}$，其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧；

3) $\iint\limits_S y\,dy\,dz+z\,dz\,dx+x\,dx\,dy$，其中 S 为螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=cv\ (a\leqslant u\leqslant b,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$ 的上侧。

第五节 格林公式

随着积分概念的推广，微积分的基本定理——牛顿-莱布

尼兹公式也相应地获得推广. 本章要讲的格林公式就是上述微积分基本定理的一个推广, 它是联系平面区域上的重积分与区域边界曲线上的第二型曲线积分之间的关系式.

5.1 公式的导出

考虑一个流体力学中的问题. 设在地面上有稳定的(即流速不随时间而变化)、不可压缩的(即流体密度不变)水流流过, 并设水层充分薄, 可以看成一个平面问题, 每点的水流速度可以用向量

$$\boldsymbol{V}(x, y)=u(x, y)\boldsymbol{i}+v(x, y)\boldsymbol{j}$$

表示. 如果没有水从地里渗出来或漏下去, 那末流过地面上一封闭曲线 L 的流量应该为零, 即流入曲线 L 多少水量同时也就流出曲线 L 多少水量. 现在设地面上各点有水从地里渗出来或漏下去, 这时流过地面上一封闭曲线 L 的流量可以不为零. 根据质量守恒定律, 流过闭曲线 L 的流量, 应该等于由 L 所围区域 D 内从地里渗出来的水量. 下面我们分别来计算这两部分水量.

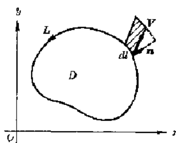


图 3-22

先求单位时间内流出曲线 L 的水量.

我们取出典型的一小段 dl 进行微元分析. dl 的起点记为 (x, y), 该点的外法线方向的单位向量记为 $\boldsymbol{n}$, 该点的流速为 $\boldsymbol{V}(x, y)$. 则单位时间内流过 dl 的流量(设水的密度 $\rho=1$)等于以 dl 为底、以 $\boldsymbol{V}$ 的长度为边的平行四边形面积(图 3-22). 这平行四边形的高为

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}=u(x, y)\cos(n, x)+v(x, y)\cos(n, y),$$

上式中 $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ 表示单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦或分量．所以单位时间内流过 dl 的水量 Δq 的微元为

$$dq=[u(x, y)\cos(n, x)+v(x, y)\cos(n, y)]dl.$$

单位时间内流过闭曲线 L 的水量为

$$q=\int_L [u(x, y)\cos(n, x)+v(x, y)\cos(n, y)]dl.$$

上式中把 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 看成被积函数，则是一个第二型曲线积分，现在曲线的方向用外法向量表示，我们规定法向量与切向量的关系如下：由法向量逆时针转过 $90°$ 即为切向量的方向．按上述规定，外法向量 $\boldsymbol{n}$ 转过 $90°$ 所得的切向量即为曲线的方向，所以曲线取的是逆时针方向．

若流量 q 大于零时，由于我们取定外法线方向为正向，说明水流从总体来看是往外流，在区域 D 内有水从地下渗出来；若流量 q 小于零，说明水流从总体来看是往里流，在区域 D 内有水漏下去．

其次我们来求单位时间内从 D 内渗出来或漏下去的水量 q^*．我们仍用微元分析方法．在 D 内取一微元 $ABCE$，设其各顶点的坐标为

$$A(x, y),\ B(x+dx, y),\ C(x+dx, y+dy),$$
$$E(x, y+dy).$$

要求出微元 $ABCE$ 内渗出来的水量 dq^*，只要计算流出小矩形边界的水量(图 3-23)．注意到 AE 的外法线方向为 $-\boldsymbol{i}$，所以流出 AE 的水量为

$$\boldsymbol{V}_A\cdot(-\boldsymbol{i})dy=-u(x, y)dy;$$

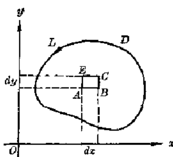


图 3-23

注意到 BC 的外法线方向

为$\boldsymbol{i}$，所以流出BC的水量为

$$\boldsymbol{V}_B\cdot\boldsymbol{i}dy=u(x+dx,\ y)dy=\left[u(x,\ y)+\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}dx\right]dy;$$

注意到AB的外法线方向为$-\boldsymbol{j}$，所以流出AB的水量为

$$\boldsymbol{V}_A\cdot(-\boldsymbol{j})dx=-v(x,\ y)dx;$$

再注意到EC的外法线方向为$\boldsymbol{j}$，所以流出EC的水量为

$$\boldsymbol{V}_E\cdot\boldsymbol{j}dx=v(x,\ y+dy)dx=\left[v(x,\ y)+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}dy\right]dx.$$

因此，单位时间内流出边界$ABCE$的水量，或单位时间内从微元$ABCE$内渗出来的水量为上面四个式子之和，即得

$$dq^*=\left[\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}\right]dxdy,$$

单位时间内从D内渗出来的水量q^*为

$$q^*=\iint_D\left[\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y}\right]dxdy.$$

根据质量守恒定律：$q=q^*$，即得格林公式：

$$\iint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=\int_L[u\cos(n,\ x)+v\cos(n,\ y)]dl.$$

这公式揭示了函数$u(x,\ y)$，$v(x,\ y)$在曲线L上的曲线积分，与它的偏导数在L所围区域上二重积分之间的关系。

5.2 格林公式

我们把上面结果写成定理的形式。

定理1　设D是以逐段光滑曲线L为边界的平面单连通区域（单连通条件不是必须的；在复连通条件下，本定理取何种形式，下面还要讨论），函数$u(x,\ y)$、$v(x,\ y)$在$D+L$上连续，并在$D+L$上有连续的偏导数，那末有关系式

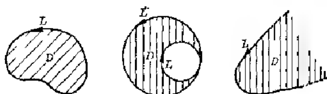


图 3 24

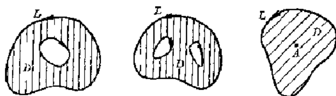


图 3 25

$$\int_L [u\cos(n,\ x)+v\cos(n,\ y)]dl = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中 $\cos(n,\ x)$，$\cos(n,\ y)$ 为曲线 L 的外法向量的方向余弦.

定理中的区域 D 要求是单连通的，直观地说就是要求 D 是无洞的区域，如图 3-24 所示区域都是单连通区域：其中第一个区域是由一条闭曲线围成的单连通区域，第二个是由两个相切圆周组成的月牙形单连通区域，第三个是抛物线内部的单连通区域. 另外如全平面，半平面 $x>0$ 等都是单连通区域.

如图 3 25 所示的区域为复连通区域：其中第一个区域挖去一个洞称二连通区域，第二个区域称三连通区域，第三个区域挖去一点 A，也是二连通区域.

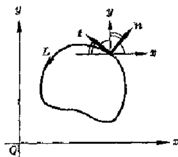


图 3-26

在证明定理以前，我们把格林公式再改变一种形式. 注意图 3 26，其中 $\boldsymbol{n}$ 是外法线方向，

t 是由 n 逆时针方向转过 90° 所得的切向量, 由图看出:

$$\begin{cases}\cos(n,\ x)=\cos(t,\ y),\\ \cos(n,\ y)=-\cos(t,\ x).\end{cases}$$

这关系式是通过一个特殊位置推出来的, 但事实上这关系式对 L 上任意一点位置都是成立的. 于是定理 1 中的公式可改写成

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_L[u\cos(n,\ x)+v\cos(n,\ y)]\,dl$$

$$=\int_L[u\cos(t,\ y)-v\cos(t,\ x)]\,dl,$$

再由本章第二节 2.3 段知

$$\int_{L_1}[u\cos(t,\ y)-v\cos(t,\ x)]\,dl=\int_L u\,dy-v\,dx,$$

故
$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{L_1}u\,dy-v\,dx.$$

上式对任意两个具有连续偏导数的函数 $u(x,\ y)$、$v(x,\ y)$ 都成立. 我们把它改变一下记号, 令

$$P(x,\ y)=-v(x,\ y),\quad Q(x,\ y)=u(x,\ y).$$

则上式变为

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

我们把定理 1 中的公式称为格林公式的第一种形式, 把上面公式称为格林公式的第二种形式. 因为这两种形式今后都要用到, 不必每次用时重新再推导一遍, 所以我们将这两种形式平等看待, 也把第二种形式写成下列定理:

定理 2 设 D 是以逐段光滑曲线 L 为边界的单连通区域, 函数 $P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$ 在区域 $D+L$ 上连续, 并在 $D+L$ 上有连续的偏导数, 则有关系式

$$\int_L P dx+Q dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx dy,$$

其中 L 的方向是逆时针方向.

定理 1 与定理 2 从逻辑上是等价的，前面由定理 1 导出定理 2，也可从定理 2 导出定理 1，所以只要任选其一加以证明即成. 下面我们来证明定理 2.

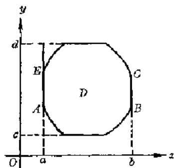


图 3-27

【证明】 假定区域 D 既可看成由上、下两条曲线 $y=y_1(x)$、$y=y_2(x)$ 围成(图 3-27)，又可看成由左、右两条曲线 $x=x_1(y)$、$x=x_2(y)$ 围成（图 3-27）. 我们对这种特殊区域证明定理 2. 注意要证定理 2 只要证明下面两式成立即成:

$$\int_L P dx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

$$\int_L Q dy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

我们利用重积分与线积分的计算证明上面两式成立.

因区域 D 由曲线 $y=y_1(x)$、$y=y_2(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 与直线段 AE、BC 围成，由重积分化累次积分的公式，有

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y} dy=\int_a^b P(x,\ y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$$

$$=\int_a^b\left[P(x,\ y_2(x))-P(x,\ y_1(x))\right]dx.$$

再由线积分的计算公式，有

$$\int_L P\,dx=\int_{AB} P\,dx+\int_{BC} P\,dx+\int_{CE} P\,dx+\int_{EA} P\,dx.$$

在 BC, EA 上 x 为常数，所以 $\int_{BC} P\,dx=\int_{EA} P\,dx=0$, 又有

$$\begin{aligned}\int_L P\,dx&=\int_{AB} P\,dx+\int_{CE} P\,dx\\&=\int_a^b P(x,\ y_1(x))\,dx+\int_b^a P(x,\ y_2(x))\,dx\\&=\int_a^b P(x,\ y_1(x))\,dx-\int_a^b P(x,\ y_2(x))\,dx.\end{aligned}$$

比较重积分与线积分的结果，即得

$$\int_L P\,dx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

又因区域 D 由曲线 $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ 及两个直线段围成，同理可证

$$\int_L Q\,dy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

这时重积分前没有负号，是由于 y 由小增大的方向，与区域 D 右侧的边界正向正好相反的缘故。

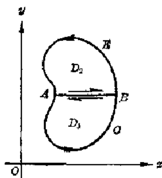


图 3-28

综合上面两式，便得

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.\quad \blacksquare$$

我们对特殊区域证明了定理2，但定理2对任意单连通区域都成立。事实上任意单连通区域 D 总可用辅助曲线把它分成几个上述的特殊区域。如图 3-28 中的区域 D，用直线段 AB 把 D 分成两个区域 D_1、D_2，而区域 D_1、

D_2 是上述特殊的区域．因此公式对 D_1、D_2 成立，有

$$\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{ACBA}P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int_{ACB}P\,dx+Q\,dy+\int_{BA}P\,dx+Q\,dy,$$

$$\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{BEAB}P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int_{BEA}P\,dx+Q\,dy+\int_{AB}P\,dx+Q\,dy.$$

把上面两式相加时，在辅助线 AB 上的线积分有两个，这两个线积分方向相反，正好抵消，所以

$$\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\int_{ACB}P\,dx+Q\,dy+\int_{BEA}P\,dx+Q\,dy,$$

即为 $$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{L}P\,dx+Q\,dy.$$

公式还可以进一步推广到复连通区域．设 D 为二连通区域，它的边界曲线由 L_1 与 L_2 组成，记 $L=L_1+L_2$（图3-29）．边界 L_1 与 L_2 的方向按如下规则确定：若一人站立在平面上沿闭路环行时，如果闭路所围区域总在人的左方，则人行的方向就是闭路的方向．当人在 L_1 上作逆时针方向环行时，区域 D 落在人的左边，所以 L_1 的方向应取逆时针方向；当人在 L_2 上作顺时针方向环行时，区

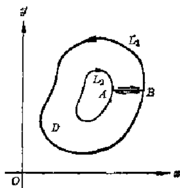


图 3-29

域 D 落在人的左边，所以 L_2 的方向应取顺时针的方向. 对区域 D 的边界 L 取定方向后，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_L P\,dx+Q\,dy.$$

事实上只要作辅助线 AB，A 点在 L_2 上，B 点在 L_1 上，把 AB 也看成边界，区域 D 就变成单连通区域. 对单连通区域格林公式成立，故有

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy&=\int_{AB}P\,dx+Q\,dy+\int_{L_1}P\,dx+Q\,dy\\&\quad+\int_{BA}P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2}P\,dx+Q\,dy\\&=\int_{L_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{L_2}P\,dx+Q\,dy\\&=\int_{L}P\,dx+Q\,dy.\end{aligned}$$

所以对二连通区域 D 格林公式也成立.

5.3 应用与例子

设区域 D 的边界为 L，L 的方向按上述规则来定(图 3-30). 在格林公式中取

$$P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=x,$$

得到

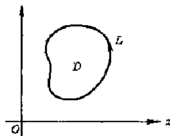


图 3-30

$$\iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_L -y\,dx+x\,dy,$$

即

$$2\iint_D dx\,dy=\oint_L -y\,dx+x\,dy.$$

记区域D的面积为A，则可以用曲线积分表示区域的面积A：

$$A=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy.$$

【例 1】 计算椭圆L：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的面积A。

解：椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

参数t由0至2π时，曲线L的方向为逆时针方向，所以椭圆面积A为

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(-b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(b\cos t)]dt\\&=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\pi ab.\end{aligned}$$

当$a=b$时即为圆的面积。

【例 2】 计算曲线积分

$$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

其中L是：$x^2+y^2=a^2$。

解：在本章第二节例5已算出这个曲线积分的值为2π。现在应用格林公式来求积分的值，若直接取

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

在圆$x^2+y^2\leqslant a^2$上应用格林公式是有问题的，因为函数

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在原点不连续，不满足格林公式的条件. 但我们可以利用曲线 L 的方程将被积函数化简得

$$\oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\oint_L -y\,dx + x\,dy,$$

然后取 $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, 在 $x^2+y^2 \leqslant a^2$ 上应用格林公式(或应用面积公式)得

$$\oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\oint_L -y\,dx + x\,dy$$
$$= \frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} 2\cdot dx\,dy = \frac{1}{a^2}\cdot 2\pi a^2 = 2\pi.$$

【例 3】 计算曲线积分

$$\oint_L \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$

其中 L 是椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (图 3-31).

解: 我们可以利用椭圆的参数方程, 直接计算曲线积分, 这样做计算比较复杂. 若应用格林公式, 取

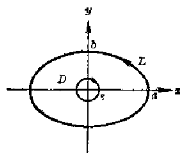


图 3-31

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

它们在原点不连续, 不满足格林公式的条件. 为此我们在椭圆 L 内以原点为心, 以充分小正数 ε 为半径作一小圆, 小圆边界记作 L_1, 使 L_1 整个位于 L 内部, L_1 的方向取顺时针方向, 则在 L 与 L_1 之间的区域 D 上可应用格林公式, 这时函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在 D 上连续可微, 所以有

$$\int_{L}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+\int_{L_1^-}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_{D}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]dxdy=0.$$

因此

$$\int_{L}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=-\int_{L_1^-}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

$$=\int_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

曲线 L_1^- 为逆时针方向，当闭路为圆时，由例2知积分值为 2π，最后得到

$$\int_{L}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=2\pi.$$

由这例子可以看出，只要闭路所围区域包含原点，方向为逆时针方向，积分值总是等于 2π；若闭路所围区域不包含原点，则积分值必为零.

【例 4】 计算重积分

$$\iint_{D}x^2dxdy,$$

其中 D 是以 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ 为顶点的三角形区域(图 3-32).

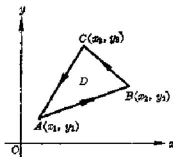


图 3-32

解：格林公式构通重积分与线积分之间的联系，我们可以通过算重积分来求线积分的值，也可以通过算线积分来求重积分的值. 这题若直接用化累次积分办法来做显得有点烦，我们把它化为线积分来算.

取 $P(x,y)=0,\ Q(x,y)=\dfrac{x^3}{3},$

应用格林公式得

$$\iint_D x^2 dx dy=\int_L \frac{x^3}{3}dy=\int_{AB}\frac{x^3}{3}dy+\int_{BC}\frac{x^3}{3}dy+\int_{CA}\frac{x^3}{3}dy.$$

计算上式右端第一个线积分时，注意到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

所以

$$\int_{AB}\frac{x^3}{3}dy=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\frac{x^4}{12}\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_2^4-x_1^4}{12}=\frac{(y_2-y_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)}{12}.$$

同理

$$\int_{BC}\frac{x^3}{3}dy=\int_{x_2}^{x_3}\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{x^3}{3}dx$$

$$=\frac{(y_3-y_2)(x_3+x_2)(x_3^2+x_2^2)}{12},$$

$$\int_{CA}\frac{x^3}{3}dy=\int_{x_3}^{x_1}\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}\cdot\frac{x^3}{3}dx$$

$$=\frac{(y_1-y_3)(x_1+x_3)(x_1^2+x_3^2)}{12},$$

所以

$$\iint_D x^2 dx dy=\frac{1}{12}[(y_2-y_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)$$

$$+(y_3-y_2)(x_3+x_2)(x_3^2+x_2^2)$$

$$+(y_1-y_3)(x_1+x_3)(x_1^2+x_3^2)].$$

【例 5】 设 D 是以逐段光滑闭曲线 L 围成的单连通区

域，函数 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 在 $D+L$ 上有连续的偏导数，证明：

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

$$=\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 L_1 的外法线方向.

解：由第一章第九节的方向导数公式，得

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y),$$

所以

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl=\int_L v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\right]dl$$

$$=\int_L\left[v\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\right]dl$$

应用定理 1 中的格林公式，有

$$\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dx\,dy$$

$$=\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

$$+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

移项即得

$$\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

$$=\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl-\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

这个公式的意义和作用，相当于一元函数中的分部积分公式.

习 题 五

1. 计算星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 所围的面积。

2. 应用格林公式计算下列曲线积分:

   1) $\oint_L xy^2dy-x^2y\,dx$, L: $x^2+y^2=a^2$;

   2) $\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy$, L: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

   3) $\oint_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, L 为区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 与 $0\leqslant y\leqslant\sin x$ 的边界;

   4) $\oint_L (x^2+xy)dx+(x^2+y^2)dy$, L 为区域 $0\leqslant x\leqslant 1$ 与 $0\leqslant y\leqslant 1$ 的边界;

   5) $\oint_L (x^2+xy)dx+(x^2+y^2)dy$, L 为区域 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 与 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 的边界.

3. 应用格林公式计算曲线积分:

   1) $\int_{A_{mo}} (e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy$, 其中 A_{mo} 为由点 $A(a,\ 0)$ 至点 $O(0,\ 0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$;

   2) $\int_{AB} (x^2+y)dx+(x-y^2)dy$, 其中 AB 为由 $A(0,0)$ 至 $B(1,1)$ 点的曲线 $y^3=x^2$.

   [提示: 使变成封闭曲线, 然后算辅助线上的线积分与算一个重积分]

4. 证明: L 为封闭曲线, $\boldsymbol{l}$ 为任意的方向, 有

$$\oint_L \cos(l,\ n)dl=0,$$

   其中 $\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

   [提示: 设 $\boldsymbol{l}$ 为一单位向量, 则 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=\cos(n,\ l)$.]

5. 设 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上调和, 即 $f(x,\ y)$ 满足偏微分方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 证明:

1) $\int_L f\frac{\partial f}{\partial n}dl=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$，其中 L 为 D 的边界，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向；

2) 若函数 $f(x, y)$ 在 L 上取值为零，则 f 在 D 内恒为零.

6. 设 $u(x, y)$ 在区域 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上调和，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，证明

1) $\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}rd\theta=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy\ (0<r<R)$；

2) 把积分 $\int_0^{2\pi}u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$ 看成 r 的函数，则它在区间 $[0, R]$ 上为一常数；

3) 调和函数在中心处的值等于它在圆周上的平均值，即

$$u(0, 0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\quad(0<r<R);$$

4) 调和函数在中心处的值等于它在圆上的平均值

$$u(0, 0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}u(x, y)dxdy\quad(0<r<R).$$

5.4 变换的雅可比行列式

利用格林公式，我们可以进一步讨论平面变换的雅可比行列式的几何意义.

设变换函数

$$\begin{cases}x=x(u, v),\\ y=y(u, v).\end{cases}$$

在 uv 平面区域 $\triangle$ 上具有二阶连续偏导数，且把 uv 平面上区域 $\triangle$ 一一对应地变到 xy 平面上区域 D，若逆变换也连续可微，则雅可比行列式在 $\triangle$ 上不为零，即

$$J(u, v)=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\neq 0,$$

现在我们讨论行列式绝对值的几何意义，如图 3–33 所示：在 $\triangle$ 上画一封闭曲线 L'，它围成区域的面积记为 σ'，并设 L' 的

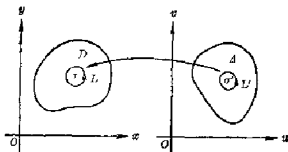


图 9-33

参数方程为

$$\begin{cases} u=u(t), \\ v=v(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

当 t 由 α 增至 β 时，对应于曲线 L' 的正向．现经变换后，把曲线 L' 变成区域 D 上的曲线 L，它所围的面积记作 σ，则曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(u(t),v(t)), \\ y=y(u(t),v(t)), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

当 t 由 α 增至 β 时，可能对应于 L 的正向，也可能对应于 L 的负向．由上段知道，面积

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \oint_{l} -y\,dx + x\,dy.$$

若 t 增大时对应于 L 的正向时取"+"号，否则取"−"号．

由线积分计算公式，得

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \Big\{ -y(u(t),\ v(t)) \Big[\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) \Big] \\ &\qquad + x(u(t),\ v(t)) \Big[\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \Big] \Big\} dt \\ &= \pm \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \Big\{ \Big[-y(u(t),\ v(t)) \frac{\partial x}{\partial u} + x(u(t),\ v(t)) \frac{\partial y}{\partial u} \Big] u'(t) \\ &\qquad + \Big[-y(u(t),\ v(t)) \frac{\partial x}{\partial v} + x(u(t),\ v(t)) \frac{\partial y}{\partial v} \Big] v'(t) \Big\} dt. \end{aligned}$$

再由线积分计算公式继续得到

$$\sigma=\pm\frac{1}{2}\int_{L'}\left\{\left[-y(u,\ v)\frac{\partial x}{\partial u}+x(u,\ v)\frac{\partial y}{\partial u}\right]du\right.$$
$$\left.+\left[-y(u,\ v)\frac{\partial x}{\partial v}+x(u,\ v)\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv\right\},$$

这样，通过计算把一个 L 上的曲线积分，变为 L' 上的曲线积分，然后在区域 σ' 上应用格林公式，得

$$\sigma=\pm\frac{1}{2}\iint_{\sigma'}\left[\left(-\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}-y\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+x\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right)\right.$$
$$\left.-\left(-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-y\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+x\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}\right)\right]dudv$$
$$=\pm\frac{1}{2}\iint_{\sigma'}2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dudv$$
$$=\pm\iint_{\sigma'}J(u,\ v)dudv.$$

利用重积分中值定理有

$$\sigma=\pm J(u^*,\ v^*)\sigma',$$

其中 $(u^*,\ v^*)$ 为 σ' 中一点．取绝对值后有

$$\sigma=|J(u^*,\ v^*)|\sigma'.$$

这说明变换把区域 σ' 变成 σ 时，它们面积之比等于变换的雅可比行列式在 σ' 上某一点处的绝对值．利用这个公式，我们可以给重积分变换公式以较严格的证明．

第六节　场与保守场

在第一章与第二章，我们讨论了多元函数的微分法与积分法．而在这章我们已经遇到了多元向量函数的积分问题，如第二型曲线、曲面积分，也可以说是多元向量函数的线积分

与面积分. 从这节开始我们将明确提出多元向量函数的概念, 也就是场的概念.

6.1 场的概念、数量场的等位面与梯度

许多实际问题中，经常需要研究物理量在空间区域中的分布及其随时间变化的规律. 如在天气预报工作中，需要知道气压、温度、密度、气流速度在空间区域中的分布，及其随时间变化的规律；在石油开采中，需要知道地下各点的压力、石油流动的速度在地下的分布，及其随时间的变化规律；在卫星通讯中，需要知道电磁场在空间的分布，及其随时间的变化规律. 象这种物理量在空间或空间一部分中的分布就称为"场".

上面提到的物理量可分为两类：一类是数量，如压力、温度、密度等，它们在空间或空间一部分中的分布就称为压力场、温度场、密度场，这些都统称*数量场*，给定一个数量场就相当于给定一个四元函数，记作

$$u=u(x,\ y,\ z,\ t);$$

另一类是向量，如速度、电场强度、磁场强度等，它们在空间或空间一部分中的分布就称为速度场、电场、磁场，这些场统称为*向量场*，给定一个向量，就相当于在空间给定一个四元向量函数

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z,\ t).$$

从数学上来说，数量场和向量场不是什么新的概念，就是把多元函数概念具体化，现在自变量是位置 x, y、z 和时间 t，而变量为一数量或向量，给定向量场 $\boldsymbol{F}$ 相当于给定三个分量

$$\begin{cases} P=P(x,\ y,\ z,\ t), \\ Q=Q(x,\ y,\ z,\ t), \\ R=R(x,\ y,\ z,\ t). \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}.$$

所以给定向量场也就是给定三个四元函数.

若场明显地依赖时间 t, 而且随时间的变化而变化, 这种场称为不定常场; 若场不依赖于时间 t, 不随时间而变化, 这种场称为定常场.

还要指出的是: 物理中的量除数量和向量外, 还有其它的量, 如应力既不是数量也不是向量, 我们称它为张量, 在本书中不讨论这类量.

关于数量场我们前面已经讨论了很多, 第一章与第二章的内容, 及本章第一型曲线、曲面积分, 都可看成是对数量场的讨论. 下面还要补充一个等位面(等位线)的概念.

设平面数量场

$$u=u(x, y)$$

中的 u 表示山的高度, (x, y) 变化范围就是这座山所占的区域. 要表示这个数量场一种办法是塑造山的立体模型, 这样做法的好处是明显的, 因为看起来一目了然, 但缺点是制作太麻烦, 而且不便携带. 另一种表示数量场的办法, 是画地图时常用的办法, 就是在自变量变化的区域上画出一系列等高线. 如图 3-34 我们画出了山的 100 米、200 米、300 米、400 米的四条等高线. 通过等高线, 我们可以想象出山的大致形状. 比如说这座山有两个高峰, 每个峰高都超过 400 米, 两峰之间有一谷, 山的一边等高线较密, 说明山的坡度较陡, 山的另一边等高线较疏, 说明山的坡度较小, 容易攀登. 如果每隔 10 米画一条等高线,

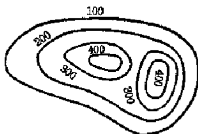


图 3-34

则山的轮廓就显示得更清楚．这种用等高线的办法表示数量场的优点是：能在一个二维平面上刻划出一个立体形象．

对空间数量场

$$u=u(x, y, z)$$

来说，造模型的办法已经是不可能了，但用等位面的办法仍能表示数量场在空间的分布．

定义 在自变量变化的区域中，使函数值 u 等于 C 的点的全体所组成的曲面，称为等位面．它的方程是

$$u(x, y, z)=C.$$

过定义域中任意一点 (x_0, y_0, z_0)，总可作一等位面，这个等位面的方程是

$$u(x, y, z)=u(x_0, y_0, z_0).$$

任意两个等位面不会相交，如果两个等位面相交的话，交点处就有两个不同的函数值，这与每点只有一个函数值相矛盾．

在第一章第九节中，我们引进了数量场

$$u=u(x, y, z)$$

在每一点 $A(x, y, z)$ 的梯度向量，记为

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

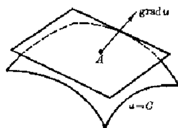


图 3-35

它告诉我们数量场在 A 点沿上述方向增加最快，所以当动点沿梯度方向移动时，数量场增加最快；而过 A 点的等位面告诉我们，当动点在等位面上移动时，数量场不起变化，既不增也不减．那么 A 点的梯度与过 A 点的等位面究竟有什么关系呢？

设数量场在 A 点的值为 C 过 A 点的等位面方程为

$$u(x, y, z)=C,$$

由第一章第六节知道这个曲面在 A 点的法向量为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

形式上与 A 点梯度一样，所以 A 点的梯度与过 A 点的等位面垂直(图 3-35)。

给定数量场 $u=u(x, y, z)$，在每一点可以求出它的梯度向量，这些梯度向量就是一个向量场。所以给定一个数量场，可以产生一个向量场。我们引进算符向量(也叫哈密顿算子)

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

它是算符概念的扩充，算符是把一个函数变成一个函数，它是把一个函数变成一个向量函数。如算符向量 ∇ 作用在函数 $u=u(x, y, z)$ 上，就得到向量函数

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)=\operatorname{grad} u.$$

【例 1】 设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\nabla f(r)$。

解：

$$\begin{aligned}\nabla f(r)&=\left(f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}, f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\right)\\&=\left(f'(r)\frac{x}{r}, f'(r)\frac{y}{r}, f'(r)\frac{z}{r}\right)=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

6.2 保守场与势函数

设在空间直角坐标系原点处，放置一电量为 q 的电荷，则在周围空间产生一静电场，静电场在每一点的电场强度，按定

义即为该点单位正电荷所受到的力，根据库仑定律可求出点电荷产生的静电场在每点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

其中 ε 为介电常数，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个向量场，这个向量场在空间的分布很有规律．如果对例 1 没有忘记的话，那末这个向量场就是数量场

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\quad(\text{其中 } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

的负梯度场，即

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad} u=-\nabla u.$$

当然，不是任意给定一个向量场 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$，都存在一数量场 u，使向量场恰好是数量场 u 的梯度场（或负梯度场）．这样，我们就可把向量场分成两类，一类向量场，都存在一数量场，使向量场恰好是数量场的梯度场，这类向量场应该期望有较好的性质；一类向量场是不存在一数量场，使它恰好是数量场的梯度场．所以对这两类场有分别加以讨论的必要．

定义 设在空间某一区域中给定向量场 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$，若在该区域上存在一函数或数量场 $u(x, y, z)$，使得

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} u(=\nabla u),$$

则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为保守场，函数 u 为向量场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数或位函数．

这一定义与物理中的向量场、势函数定义略有差别．那里要求存在一函数 $u(x, y, z)$，使得

$$\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad} u,$$

则称 $\boldsymbol{F}$ 为保守场，u 是势函数．物理中势函数的定义多了一

个"－"号，这主要是从物理意义考虑，从数学角度来看，这个差别是无关紧要的。

在保守场的定义中，要求区域上存在数量场 $u(x, y, z)$，这个函数必须是区域上的单值函数，如果存在多值函数满足定义中的条件，$\boldsymbol{F}$ 就不是保守场。例如在除去原点的平面区域上给定向量场

$$\boldsymbol{F}=-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j},$$

容易验证函数

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

的梯度等于 $\boldsymbol{F}$。这是因为

$$d\theta=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},$$

所以
$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

即
$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\theta.$$

那么能否说在除去原点的平面上 $\boldsymbol{F}$ 是保守场呢？不能，因为函数 θ 是点 (x, y) 的极角，当动点沿原点为心的圆周转圈时，θ 的值不断增加，每转一圈，θ 的值增加 2π。可见 θ 是一无穷多值函数，所以 $\boldsymbol{F}$ 在除去原点的平面区域上不是保守场。

若限制区域为上半平面，即 $y>0$，这时 θ 取值为：$0<\theta<\pi$，它是一个单值函数，按定义 $\boldsymbol{F}$ 在上半平面区域上是保守场，它的势函数为

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

由此可见，$\boldsymbol{F}$ 是否是保守场，不仅与 $\boldsymbol{F}$ 本身有关，也与区域有关。$\boldsymbol{F}$ 在大的区域上不是保守场，在一个较小的区域上可以是保守场。

还要指出的是：若 u 是 $\boldsymbol{F}$ 的势函数，则对任意常数 C，$u+C$ 也是 $\boldsymbol{F}$ 的势函数；反之，若 u，v 都是 $\boldsymbol{F}$ 的势函数，即

$$\operatorname{grad}u=\boldsymbol{F},\ \operatorname{grad}v=\boldsymbol{F},$$

则
$$\operatorname{grad}(u-v)=\boldsymbol{0},$$

我们就有

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(u-v)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial(u-v)}{\partial z}=0,$$

函数 $u-v$ 在区域上的三个偏导数恒为零，这个函数必为常数，即有 $u-v=C$，或

$$u=v+C.$$

所以，若差一常数项可以不计外，向量场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数是唯一的.

6.3 保守场的性质

上面保守场的定义，与一元函数的原函数定义非常相似. 当时我们说：若在区间 $[a, b]$ 上给定函数 $f(x)$，若存在一函数 $u(x)$，使得

$$u'(x)=f(x),$$

则称 $u(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，这时有

$$\int_a^b f(x)dx=u(x)\Big|_a^b=u(b)-u(a),$$

这说明知道原函数，对求 $f(x)$ 的积分非常方便. 那么对保守场是否也有类似性质呢？有的，这就是线积分与路径无关性质.

设向量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 D 上是保守场，它的势函数为 $u(x, y)$，$L=\widehat{AB}$ 是 D 中任意一条有向曲线，则有

$$\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=u\Big|_A^B.$$

若 $\boldsymbol{F}(x, y)=P(x, y)\boldsymbol{i}+Q(x, y)\boldsymbol{j}$，$A$ 的坐标是 (x_0, y_0)，B 的坐标是 (x_1, y_1)，上式具体写出来便为：

$$\int_{AB}P(x, y)dx+Q(x, y)dy=u(x_1, y_1)-u(x_0, y_0).$$

我们发现，向量场 $\boldsymbol{F}$ 的线积分等于势函数在终点的值减去势

函数在起点的值，这个结果中只与起点和终点的坐标有关，而与如何联接起点和终点的路径无关．这是一个非常好的性质，在证明这个有趣的性质以前，我们先给出一个定义．

定义　在区域 D 中给定向量场 $\boldsymbol{F}(x,\ y)$，对于 D 内任意两点，对于以 A 为起点、以 B 为终点的 D 内任意两条曲线 L_1、L_2(图 3-36)，若恒有

$$\int_{L_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{L_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关．

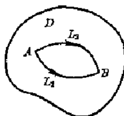


图　3-36

定理3　在区域 D (不要求是平面单连通区域) 上给定向量场 $\boldsymbol{F}(x,\ y)=P(x,\ y)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y)\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{F}$ 是保守场的充分必要条件是 $\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关．

【证明】 必要性．

若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，由保守场的定义，存在一函数 $u=u(x,y)$，使得

$$\operatorname{grad} u=\boldsymbol{F},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y).$$

要证 $\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关，只要证明对 D 中任取的起点 $A(x_0,\ y_0)$，给点 $B(x_1,\ y_1)$，及任意一条联接 AB 的曲线 L，$\boldsymbol{F}$ 沿 L 的线积分只依赖于 A、B 而与 L 无关即成．设曲线 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

参数 $t=\alpha$ 对应于起点 A，$t=\beta$ 对应于终点 B，即

$$\begin{cases}x_0=x(\alpha),\\ y_0=y(\alpha);\end{cases}\quad \begin{cases}x_1=x(\beta),\\ y_1=y(\beta).\end{cases}$$

由曲线积分的计算公式

$$\begin{aligned}
&\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{AB}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\\
&=\int_\alpha^\beta [u'_x(x(t),\ y(t))x'(t)+u'_y(x(t),\ y(t))y'(t)]dt\\
&=\int_\alpha^\beta \frac{du(x(t),\ y(t))}{dt}dt=u(x(t),\ y(t))\Big|_\alpha^\beta\\
&=u(x(\beta),\ y(\beta))-u(x(\alpha),\ y(\alpha))\\
&=u(x_1,\ y_1)-u(x_0,\ y_0).
\end{aligned}$$

所得结果表明，$\boldsymbol{F}$ 的线积分确实只与 A、B 两点有关，而与联接 A、B 的曲线 L 无关，故必要性得证.

充分性.

要证 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，按定义要去找出一个函数 $u=u(x,\ y)$，使得 $\operatorname{grad}u=\boldsymbol{F}$. 这个函数怎么找呢？由假设条件，$\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关，我们固定起点 $A(x_0,\ y_0)$，终点 $B(x,\ y)$ 为 D 内任意一点，考虑线积分

$$\int_{AB} P(\xi,\ \eta)d\xi+Q(\xi,\ \eta)d\eta,$$

因为线积分值与路径无关，所以积分值被 $B(x,\ y)$ 点唯一地确定，对不同的终点 $B(x,\ y)$，积分值可以不同，根据函数的定义，这个线积分值就是 B 点坐标 $(x,\ y)$ 的函数，记为

$$u(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P(\xi,\ \eta)d\xi+Q(\xi,\ \eta)d\eta.$$

(注意：这种把起点放在下限，终点放在上限的记号，适用于线积分与路径无关情形.)这样我们找到了函数 $u=u(x,\ y)$，下面证明它的梯度等于 $\boldsymbol{F}$，即要证

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y).$$

为此再考虑一点 $C(x+\Delta x,\ y)$，则有

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)$$
$$=\int_A^C P\,d\xi+Q\,d\eta-\int_A^B P\,d\xi+Q\,d\eta,$$

由于线积分与路径无关，曲线 AC 可以取成 $AB+BC$，且让 BC 平行于 x 轴(图 3-37)，因此

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)$$
$$=\int_A^B P\,d\xi+Q\,d\eta$$
$$+\int_B^C P\,d\xi+Q\,d\eta$$
$$-\int_A^B P\,d\xi+Q\,d\eta$$
$$=\int_B^C P\,d\xi+Q\,d\eta,$$

图 3-37

BC 段的参数方程为

$$\begin{cases}\xi=t,\\ \eta=y.\end{cases}\quad (x\leqslant t\leqslant x+\Delta x)$$

由第二型曲线积分计算公式，得

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)=\int_x^{x+\Delta x} P(t,\ y)dt,$$

应用定积分中值定理，得

$$u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)=P(x^*,\ y)\Delta x,$$

其中 x^* 满足 $x\leqslant x^*\leqslant x+\Delta x$.

于是有 $$\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}=P(x^*,\ y).$$

令 $\Delta x\to 0$，这时 $x^*\to x$ 及函数 $P(x,\ y)$ 的连续性，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}=P(x,\ y).$$

同理可证 $$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y).$$

充分性证完.】

由定理必要性的证明，并注意到 $\operatorname{grad} u=\boldsymbol{F}$ 与 $du=P\,dx+Q\,dy$ 的等价性，我们有

$$\int_{AB}P\,dx+Q\,dy=\int_{AB}du=u\Big|_A^B.$$

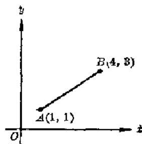


图 3-38

这个公式是微积分基本定理的推广. 利用这个公式可以得到一类线积分的简便算法：如果积分的被积表达式是某一函数 u 的全微分，则线积分的值等于函数 u 在终点的值减去函数 u 在起点的值.

【例 2】 计算曲线积分

$$\int_{AB}x\,dx+y\,dy,$$

其中 AB 为联接 $A(1,\ 1)$、$B(4,\ 3)$ 的直线段(图 3-38).

解:

$$\begin{aligned}\int_{AB}x\,dx+y\,dy&=\int_{AB}\frac{1}{2}d(x^2+y^2)\\&=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big|_{1,1}^{4,3}\\&=\frac{1}{2}(16+9)-\frac{1}{2}(1+1)=\frac{23}{2}.\end{aligned}$$

【例 3】 计算曲线积分

$$\int_{AB}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2},$$

其中 AB 同上题.

解：

$$\int_{AB}\frac{xdy-ydx}{x^2}=\int_{AB}d\frac{y}{x}=\frac{y}{x}\Big|_{(1,1)}^{(4,3)}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}.$$

【例 4】 设单位正电荷由 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 移动到 $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 时，求电场 $\boldsymbol{F}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 对它所作的功.

解：由第二节知电场所作的功 W 为

$$W=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{AB}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{x}{r^3}dx+\frac{y}{r^3}dy+\frac{z}{r^3}dz\right)$$

$$=\int_{AB}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^3}d(x^2+y^2+z^2)=\int_{AB}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dr^2}{r^3}$$

$$=\int_{AB}\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{dr}{r^2}=\int_{AB}\frac{q}{4\pi\varepsilon}d\left(-\frac{1}{r}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\Big|_A^B.$$

记 $r_B=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$，$r_A=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$，则

$$W=\left[-\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\right]_A^B=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right].$$

这例说明，如果 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，则作功与路径无关. 若起点与终点重合时，保守场作功为零. 一般来说我们有下面定理.

定理 4 在区域 D 上给定向量场 $\boldsymbol{F}(x,\ y)$，则 $\boldsymbol{F}$ 是保守场的充分必要条件是：$\boldsymbol{F}$ 沿着任一闭曲线的线积分为零.

【证明】 必要性.

在 D 上任取一闭路 L. 要证 $\boldsymbol{F}$ 沿 L 的线积分为零，我们在 L 上任取两点 A，B（图 3-39），根据定理 3，知保守场 $\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关，得

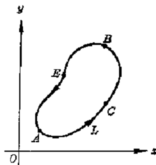


图 3-39

$$\int_{ACB}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{AEB}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

由线积分的方向性，得

$$\int_{ACB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{BEA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

$$\int_{ACB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{BEA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0,$$

即有

$$\int_{L} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

充分性.

要证 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，由定理 3，只要证 $\boldsymbol{F}$ 的线积分与路径无关. 在 D 内任取两点 A、B，任作两条联接 A、B 的路径 L_1 与 L_2 (图 3 40)，考虑由 L_1 与 L_2^- 组成的闭路 $L=L_1+L_2^-$，根据定理条件有

$$\int_{L_1+L_2^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0,$$

得

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{L_2^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0,$$

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{L_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

图 3 40

即得

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{L_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

这说明线积分与路径无关，所以 $\boldsymbol{F}$ 是保守场.】

6.4 保守场的判别法

根据保守场的定义，要判断 $\boldsymbol{F}(x, y)$ 是否是保守场，需要寻找势函数 $u(x, y)$. 若势函数不存在，$\boldsymbol{F}$ 不是保守场；若势函数存在，$\boldsymbol{F}$ 是保守场. 当 $\boldsymbol{F}$ 的形式比较简单时，我们可以通过观察法，直接找出 $\boldsymbol{F}$ 的势函数 u，当 $\boldsymbol{F}$ 形式稍为复杂时，凭观察法就不能解决问题. 但给定向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 后，

它是否是保守场应该是客观存在的事实，由函数 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 的性质应能判断它是否是保守场，下面我们就来寻找 P、Q 应满足的性质。

假设 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，即存在势函数 $u(x, y)$，使得 $\mathrm{grad}\, u = \boldsymbol{F}$，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

上面第一式对 y 求偏导数，第二式对 x 求偏导数后得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由混合偏导数与求导的次序无关定理，即得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，必有上式成立。

但上式成立时，$\boldsymbol{F}$ 是否是保守场呢？设 L 为 D 内任一闭路，且设 L 所围的区域 D_1 完全被包含在 D 内，则由格林公式

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

所以当 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时，重积分为零，即 $\boldsymbol{F}$ 沿闭路 L 的线积分为零，根据定理 4，知 $\boldsymbol{F}$ 在 D 上为保守场。在上面讨论中，我们要求 D 内任一闭路 L 所围的区域 D_1 均在 D 内，这个条件是不可缺的，只有区域 D 是单连通区域时，D 才具有这个条件，若 D 是复连通区域，总可找出一闭路，使它所围区域 D_1 不全在 D 内。这样，我们就证明了下面的定理。

定理 5 设在单连通区域 D 上给定向量场 $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{F}$ 是保守场的充分必要条件是在 D 上有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

前面我们讨论了平面保守场．由平面推广到空间时，对于定理3与定理4来说，从叙述到证明都没有什么差别，而对定理5来说，现在定理的叙述和证明只适用于平面情形，对于空间情形则要到第八节才能讨论．

有了定理5，判别平面保守场变得非常容易，只要验证两个偏导数是否相等，但对区域提出了较苛刻的要求．

【例5】 设 $\boldsymbol{F}(x, y)=(x+y+1)e^x\boldsymbol{i}+e^x\boldsymbol{j}$，问 $\boldsymbol{F}$ 在全平面是否是保守场．

解：因 $P(x, y)=(x+y+1)e^x$，$Q(x, y)=e^x$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以由定理5，知 $\boldsymbol{F}$ 在全平面上为一保守场．

【例6】 设在平面坐标原点处有一质量为 m 的物体 M，在点 (x, y) 处放一单位质量的物体 N，则 N 被 M 以一力 $\boldsymbol{F}$ 向中心吸引，

$$\boldsymbol{F}=-k\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 k 为比例常数，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，问 $\boldsymbol{F}$ 在除去原点的平面上是否为保守场．

解：$\boldsymbol{F}(x, y)$ 在 x、y 轴上的分量为：

$$P(x, y)=-\frac{kmx}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad Q(x, y)=-\frac{kmy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

求偏导数得 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{3kmxy}{(x^2+y^2)^{5/2}}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

由定理5只能得出在不含原点的单连通区域上 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，而现在除去原点的平面不是单连通区域，所以由定理5得不出 $\boldsymbol{F}$ 是否是保守场．但经观察发现有单值函数

$$u(x, y)=\frac{km}{r}=\frac{km}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

存在，它的偏导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{km}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{kmx}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{km}{r^2}\cdot\frac{y}{r}=-\frac{kmy}{r^3}.$$

直接根据定义，我们可以说 $\boldsymbol{F}$ 在除去原点的平面上是保守场.

最后我们介绍一个求势函数的方法. 若在单连通区域 D 上给定向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$，满足条件

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则由定理 5 知 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，因此有势函数 $u(x, y)$ 存在，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,$$

那末怎样求出这个势函数呢？我们用"偏积分"的办法，即固定一个变量对另一变量求积分的方法来求 $u(x, y)$.

因 $\frac{\partial u}{\partial x}=P$，固定 y 对 x 求不定积分，注意这时积分常数 C 不是绝对常数，而是依赖固定的 y，确切地说，附加的常数项应改成 y 的函数，即

$$u(x, y)=\int P(x, y)dx+\varphi(y),$$

只要定出函数 $\varphi(y)$，势函数 $u(x, y)$ 也就求出来了. 为了求 $\varphi(y)$，上式对 y 求导得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx+\varphi'(y),$$

由 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ 可得

$$Q=\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx+\varphi'(y),$$

我们虽没有求出 $\varphi(y)$，但求出了 $\varphi'(y)$，所以再对 y 求积，得

$$\varphi(y)=\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy+C.$$

这样就求出了势函数 $u(x, y)$ 为

$$u(x, y)=\int P\,dx+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy+C.$$

需要说明的是 $\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]$ 确实只是 y 的函数，因此对 y 求不定积分时，只需加常数项就行了。而要说明 $\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]$ 只是 y 的函数，只要看它对 x 的偏导数是否恒为零。我们把它对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int P\,dx,$$

根据混合偏导数可交换求导次序的定理及保守场条件得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\int P\,dx$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

这样就证明了我们的结论。

【例 7】 求函数 u，使

$$du=(3x^2-3y^2+5)\,dx-6xy\,dy.$$

解：这里

$$P(x, y)=3x^2-3y^2+5,\quad Q(x, y)=-6xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-6y=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

所以由定理 5 知函数 $u(x, y)$ 是存在的。

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ 得

$$u(x, y)=\int_{0}^{x}(3x^2-3y^2+5)dx+\varphi(y)$$

$$=x^3-3xy^2+5x+\varphi(y),$$

上式对 y 求偏导数并利用 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ 得

$$-6xy=-6xy+\varphi'(y),$$

$$\varphi'(y)=0,$$

所以 $$\varphi(y)=C,$$

因此 $$u(x, y)=x^3-3xy^2+5x+C.$$

具体做题时不要套公式,如上题办法直接求函数 $u(x,y)$.

习 题 六

1. 验证被积函数为全微分,并计算下列曲线积分:

1) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy+y\,dx$;

2) $\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$;

3) $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$;

4) $\int_{(1,-1)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$;

5) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$,沿着不与 y 轴相交的途径;

6) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的途径;

7) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$;

8) $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的途径;

9) $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ 沿着不与 y 轴相交的途径;

10) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

2 求原函数 u，若

1) $du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

2) $du = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4)dy$;

3) $du = (10xy - 8y)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy$;

4) $du = (4x^3y^3 - 2y^2)dx + (3x^4y^2 - 4xy)dy$;

5) $du = [(x+y+1)e^x - e^y]dx + [e^x - (x+y+1)e^y]dy$.

3 计算下列曲线积分：

1) $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$;

2) $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$;

3) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$，其中点 (x_1, y_1, z_1) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上，而点 (x_2, y_2, z_2) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 $(a>0,\ b>0)$.

第七节　散度与奥氏公式

7.1 散度概念

梯度是刻划数量场在一点的变化状态，而散度是刻划向量场在一点的变化状态．它同梯度一样属于局部性的概念．

设空间有一部分气体受热膨胀，从而发生扩散现象．气体由温度高的地方向温度低的地方流动，气体流动的速度在空间不同的点，它的大小和方向可以是不同的，固定一点来看，由于时间的推延，气体的速度也是在不断地变化．所以气体流动的速度应该是位置和时间的函数，记为 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x, y, z, t)$．同样，气体的密度也是随着位置和时间的变化而变化，它也是位置和时间的函数，记为 $\rho = \rho(x, y, z, t)$．我们设想

在这部分空间中有一封闭曲面 S, S 所围的区域记作 Ω(同时也用这个记号表示区域的体积),现在要求流过这一封闭曲面 S 的气体流量.

现在的气体流速 $\boldsymbol{V}$ 和密度 ρ 都是时间 t 的函数, 所以只能求 t 瞬时气体流过曲面的流量. t 瞬时没有时间间隔可言, 所谓 t 瞬时气体流过曲面 S 的流量是什么意思呢? 我们想象从 t 瞬时开始,突然速度和密度都保持不变,然后考察单位时间内流过 S 的流量, 这个流量就叫做 t 瞬时流过 S 的流量.

求 t 瞬时流过 S 的流量, 先取一微元 dS,则 t 瞬时流过 dS 的流量 dq 为

$$dq = \text{密度}\times\text{高}\times\text{底} = \rho\times(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\times dS,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 dS 上的外侧单位法向量(图 3-41). 所以 t 瞬时流过曲面 S 的流量可表示为第二型曲面积分

$$q = \iint_S \rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})dS.$$

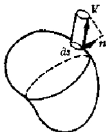


图 3-41

流量 q 的正负号, 表示气体是由 S 内部向外流还是由 S 外部向内流; $|q|$ 的大小, 表示气体在区域 Ω 内扩散得快还是扩散得慢. 若 $|q|$ 大, 表示气体在 Ω 内扩散得快; $|q|$ 小, 表示气体在 Ω 内扩散得慢. 但仔细想一想, 容易发现用 q 来刻划气体在 Ω 内扩散快慢是不充分的. 若有两个曲面 S_1、S_2, 它们所围的区域记为 Ω_1、Ω_2, 区域 Ω_1 的体积比区域 Ω_2 的体积大, 当气体流过曲面 S_1、S_2 的流量一样时, 能否说气体在区域 Ω_1 与 Ω_2 内扩散的快慢一样呢? 回答一样显然是不合理的, 在流量相等前提下, 区域大的扩散得慢, 区域小的扩散得快. 为了确切地反映扩散快慢程度, 我们用下面这个量

$$\frac{\iint\limits_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}$$

来刻划气体在Ω内扩散快慢的程度．事实上气体在Ω内各点扩散快慢仍不一样，要更好地刻划气体扩散快慢的程度，就要引入一点处散度的概念．

设A是向量场的一点，取一小区域Ω包含A点，用S表示小区域Ω的边界，曲面S的定向取外法线方向，流过S的流量除以体积Ω得

$$\frac{\iint\limits_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}.$$

这个量近似反映气体在A点扩散快慢的程度，若区域Ω越小，越能近似反映气体在A点扩散快慢的程度．令区域Ω收缩成A点时，若上式的极限存在，而且与Ω的形状无关，则称极限值为向量场$\rho\boldsymbol{V}$在A点的散度，记作

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V})_A = \lim_{\Omega\to A}\frac{\iint\limits_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}.$$

对特殊向量场$\rho\boldsymbol{V}$的散度定义中，可以看出变量t是作为常量看待．真正变量是x、y、z．因此对一般向量场定义散度时，无妨只考虑稳定场．

设$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$为一向量场，$A$为向量场中一点，向量场$\boldsymbol{F}$在$A$点的散度定义为：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(A) = \lim_{\Omega\to A}\frac{\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}.$$

所以，向量场$\boldsymbol{F}$在一点的散度，是向量场$\boldsymbol{F}$流过封闭曲面S的“流量”与封闭曲面S所围体积之比，当区域缩向一

点时比式的极限．简单地说，散度就是向量场的"流量"对体积的变化率．

由定义可以看出，向量场在一点的散度为一数量，对于场中不同的点这个数量可以不同．通过求向量场在每一点的散度，我们就可得到一个散度场，它是一个数量场．所以给定向量场，伴随着一个数量场 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}$．若 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}\neq 0$，我们称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为有源场；若 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}=0$，我们称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为无源场．

7.2 散度的计算

在散度的定义中，向量场通过曲面的"流量"与区域的体积，都是客观存在的量，与坐标选取无关，所以散度的定义也与坐标选取无关．正如两向量的数量积定义(两向量的长度相乘，再乘以两向量间的夹角的余弦)与坐标无关，但为了计算方便起见，我们推出了直角坐标系中的数量积公式一样，我们也要讨论散度在直角坐标系中的计算公式．

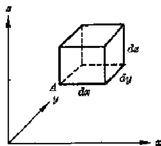


图 3-42

给定向量场 $\boldsymbol{F}$，

$$\boldsymbol{F}=P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}.$$

为了求 $\boldsymbol{F}$ 在 $A(x,\ y,\ z)$ 点的散度，我们取一以 A 为一顶点的，边长为 dx、dy、dz 的微元，这长方体微元的边界面平行于坐标面(图 3-42)，$\Omega=dx\,dy\,dz$，边界面 S 由六个平面组成，注意求极限

$$\lim_{\Omega\to A}\frac{\iint\limits_{S}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}$$

就是求 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ 中关于 $\Omega=dx\,dy\,dz$ 主要部分的系数，而把关于 $dx\,dy\,dz$ 的高阶无穷小项抹去．为了简单起见，我们直接求 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ 中关于 $dx\,dy\,dz$ 的主要部分，最后也用不到再取极限，这也就是微元法的思想．

要求 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ 的主要部分，我们分成六个平面分别考虑，按图3-42称之为上、下、左、右、前、后六个面．

注意到左面的外法线方向为 $-\boldsymbol{i}$，所以流出左面的流量为

$$\boldsymbol{F}\cdot(-\boldsymbol{i})\,dy\,dz=-P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz;$$

注意到右面的外法线方向为 $\boldsymbol{i}$，所以流出右面的流量为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i}\,dy\,dz=P(x+dx,\ y,\ z)\,dy\,dz$$

$$=\left[P(x,\ y,\ z)+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right]dy\,dz.$$

注意到前面的外法线方向为 $-\boldsymbol{j}$，所以流出前面的流量为：

$$\boldsymbol{F}\cdot(-\boldsymbol{j})\,dx\,dz=-Q(x,\ y,\ z)\,dx\,dz;$$

注意到后面的外法线方向为 $\boldsymbol{j}$，所以流出后面的流量为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}\,dx\,dz=Q(x,\ y+dy,\ z)\,dx\,dz$$

$$=\left[Q(x,\ y,\ z)+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right]dx\,dz;$$

注意到下面的外法线方向为 $-\boldsymbol{k}$，所以流出下面的流量为

$$\boldsymbol{F}\cdot(-\boldsymbol{k})\,dx\,dy=-R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy;$$

再注意到上面的外法线方向为 $\boldsymbol{k}$，所以流出上面的流量为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,dx\,dy = R(x,\ y,\ z+dz)\,dx\,dy$$

$$=\left[R(x,\ y,\ z)+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right]dx\,dy.$$

把上面六个平面的流量相加得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

即为 $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ 的主要部分，所以 A 点的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(A)=\lim_{\Omega\to A}\frac{\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS}{\Omega}$$

$$=\lim_{\Omega\to A}\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz+o(dx\,dy\,dz)}{dx\,dy\,dz}$$

$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

可见，求向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度非常容易，它等于 $\boldsymbol{F}$ 的 x 分量对 x 求偏导数，加上 $\boldsymbol{F}$ 的 y 分量对 y 求偏导数，再加上 $\boldsymbol{F}$ 的 z 分量对 z 求偏导数.

【例 1】 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

解：因 $P=x$, $Q=y$, $R=z$，所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

【例 2】 求 $\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，$\boldsymbol{r}$ 同上题，$r=|\boldsymbol{r}|$.

解：因

$$P=\frac{x}{r},\ Q=\frac{y}{r},\ R=\frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}.$$

所以 $\quad \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{r^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$

【例3】 求 $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{r}$ 同上题，$\boldsymbol{a}$ 为常向量．

解：设 $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$，

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\\alpha&\beta&\gamma\end{vmatrix}$$

$$=(\gamma y-\beta z)\boldsymbol{i}+(\alpha z-\gamma x)\boldsymbol{j}+(\beta x-\alpha y)\boldsymbol{k},$$

因此 $\quad P=\gamma y-\beta z,\ Q=\alpha z-\gamma x,\ R=\beta x-\alpha y,$

所以 $\quad \operatorname{div}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$

利用前面引入的算符向量

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

散度可以记为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F},$$

这里算符向量与通常向量的数量积，定义为 ∇ 的分量分别作用到 $\boldsymbol{F}$ 的相应分量上，然后相加．定义虽然与通常向量的数量积定义一致，但其运算规则需要按新定义重新建立，如算符向量 ∇ 与通常向量 $\boldsymbol{F}$ 的数量积为一函数；反之，通常向量 $\boldsymbol{F}$ 与算符向量 ∇ 的数量积 $\boldsymbol{F}\cdot\nabla$ 就不再是函数，而是一个新的算符：

$$P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z}.$$

这说明它们没有交换律，所以不能把通常向量的数量积规则，不加证明地搬到有算符向量参与的数量积运算上去．

【例 4】 求向量场 $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ 的散度.

解:
$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla u&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

若先作算符向量 ∇ 的数量积, 得一新的算符:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla&=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\end{aligned}$$

然后再作用到函数 u 上得

$$(\nabla\cdot\nabla)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

一般书上都把新的算符 $\nabla\cdot\nabla$ 记作 Δ, 有

$$\nabla\cdot\nabla u=(\nabla\cdot\nabla)u=\Delta u.$$

【例 5】 证明 $\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=\nabla u\cdot\boldsymbol{F}+u\nabla\cdot\boldsymbol{F}$.

解: 由算符向量与通常向量的数量积定义知:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})&=\frac{\partial}{\partial x}(uP)+\frac{\partial}{\partial y}(uQ)+\frac{\partial}{\partial z}(uR)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot P+u\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}Q+u\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\\&\qquad+\left(\frac{\partial u}{\partial z}R+u\frac{\partial R}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R\right)+u\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\\&=\nabla u\cdot\boldsymbol{F}+u\nabla\cdot\boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

设 u, v 为数量场, 由例 5 可得一非常有用的公式:

$$\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\nabla\cdot\nabla u,$$

即
$$\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u.$$

7.3 奥氏公式

回到气体扩散的例子. 设封闭曲面 S 围成的区域为 Ω, 已知 t 瞬时流过封闭曲面 S 的流量为

$$\iint_S \rho \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向, $\boldsymbol{V}$ 是速度, ρ 为密度. 现在来算一算区域 Ω 上在 t 瞬时扩散出来的气体总量. 在 Ω 上取一微元 $d\Omega$, 该微元上的散度为 $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V})$, 所以该微元上气体扩散出来的量 dq 为

$$dq=\operatorname{div}(\rho V)\,d\Omega,$$

因此区域 Ω 上扩散出来气体总量 q 为

$$q=\iiint_\Omega \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V})\,d\Omega.$$

根据质量守恒定律: 在瞬时 t,

区域内扩散出来的量 = 流过边界面的流量.

即得
$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{V})\,d\Omega=\iint_S \rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS.$$

对一般的向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$, 也有类似的公式:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,d\Omega=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线方向, 这个公式称为奥氏公式. 并将其写成定理:

定理 6 设函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在区域 $\Omega+S$ 上具有连续的偏导数, 取 S 的外法线方向为曲面的正向, 则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦. 上面的公式还可写成

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\iint\limits_{S}(P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy).$$

【证明】 我们对特殊区域加以证明. 设区域既可看成由上、下两个曲面围成, 又可看成由左、右两个曲面围成, 还可看成由前、后两个曲面围成. 如球、椭球等区域就属于此种区域.

证明奥氏公式相当于分别证明下面三个公式成立:

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S}P\cos\alpha\,dS,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S}Q\cos\beta\,dS,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{S}R\cos\gamma\,dS.$$

这三个公式的证明方法一样, 我们以第三个公式为例加以证明.

设区域 Ω 在 xy 平面上的投影区域为 D_{xy}, 它由上、下两个曲面及侧面为柱面所围成的区域(图 3-43), 并设上面的曲面 S_2, 其方程为

$$z=z_2(x,\ y),$$

下面的曲面 S_1, 其方程为

$$z=z_1(x,\ y),$$

侧面记作 S_3. 现在分别来算三重积分与第二型曲面积分.

由三重积分计算公式得

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}}dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint_{D_{xy}}[R(x,y,z)]_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dx\,dy$$

$$=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))dx\,dy$$

$$-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dx\,dy.$$

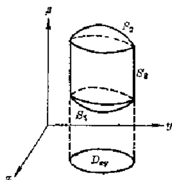


图 3 43

又由第二型曲面积分计算公式，并注意在 S_3 上 $\cos\gamma=0$；在 S_2 的上侧法向量为

$$N=\left(-\frac{\partial z_2}{\partial x},\ -\frac{\partial z_2}{\partial y},\ 1\right);$$

在 S_1 的下侧法向量为

$$N=\left(\frac{\partial z_1}{\partial x},\ \frac{\partial z_1}{\partial y},\ \quad 1\right),$$

这样可得

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$$

$$=\iint_{S_1}R\cos\gamma\,dS+\iint_{S_2}R\cos\gamma\,dS+\iint_{S_3}R\cos\gamma\,dS$$

$$=\iint_{S_1}R\cos\gamma\,dS+\iint_{S_2}R\cos\gamma\,dS$$

$$=-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy$$

$$+\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy.$$

比较三重积分和曲面积分的计算结果，即得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} R\cos\gamma\, dS.$$

同理可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} P\cos\alpha\, dS,$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} Q\cos\beta\, dS.$$

三式相加即得奥氏公式.】

证明的实质是用到微积分基本定理：

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = R\,\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}$$

然后再在等号两边对区域 D_{xy} 取重积分. 左边取重积分即为区域 Ω 上的三重积分；右边取重积分即为边界曲面 S 上的第二型曲面积分. 所以奥氏公式是微积分基本定理的推广.

最后我们要指出，虽然我们只对特殊区域证明奥氏公式成立，事实上对一般区域奥氏公式也成立. 如图 3 44 所示，区域 Ω 为单连通区域，但不能看成由上、下两个曲面所围成. 这时我们可用辅助面 S_3 把区域 Ω 分成两个区域 Ω_1 与 Ω_2，相应的边界曲面也分成 S_1 与 S_2. 对于 Ω_1 与 Ω_2 来讲属于定理证明中所述的特殊区域，因此奥氏公式成立，有

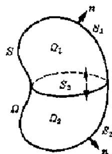


图 3 44

$$\iiint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_{S_1+S_3} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

其中 S_3 的方向向下;

$$\iiint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$\iint\limits_{S_2+S_3}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS,$$

其中 S_3 的方向向上.

上面两式相加时,左边和即为区域 Ω 上的三重积分;右边出现两个在曲面 S_3 上的曲面积分由于这两个曲面积分方向相反,其值差一符号,相加时正好抵消,剩下的是 S_1 与 S_2 上的曲面积分,也就是整个边界面 S 上的曲面积分. 所以对这种单连通区域奥氏公式仍成立.

对任意单连通区域和多连通区域奥氏公式都成立. 如 Ω 为圆环形区域,它的边界面如游泳救生圈的表面(图3-45),这是一个单连通区域.又如 Ω 为两个同心球面所围成的区域(图3-46),边界面 S 现在由两个球面组成,曲面的正向对区域 Ω 而言是外侧,所以外球面的正向应向外,内球面的正向应指向球中心,奥氏公式中的曲面积分理解成两个曲面积分相加.

奥氏公式揭示三重积分与边界曲面积分之间的联系,利用这个联系我们可以通过求三重积分来求曲面积分.

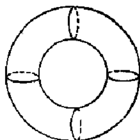


图 3-45

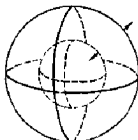


图 3-45

【例 6】 计算曲面积分

$$\oiint_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy,$$

其中 S: $x^2+y^2+z^2=R^2$, S 的方向取外法线方向.

解：由奥氏公式得

$$\oiint_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$=\frac{3}{5}R^5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{12}{5}\pi R^5.$$

【例 7】 计算曲面积分

$$\oiint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

其中 S: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,方向取外法线方向.

解：由奥氏公式得

$$\oiint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$$

$$=\iiint_\Omega 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

计算三重积分时,我们可以利用求密度为 1 的球的重心公式,并注意球 Ω 的重心为 $(a,\ b,\ c)$,得

$$\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz=a\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz=b\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz = c\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以

$$\oiint_{S} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

【例 8】 设 u, v 是空间区域 Ω 上的二阶连续可微的函数，Ω 的边界记为 S，证明：

$$\iint_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla u\,d\Omega + \iiint_{\Omega} v\Delta u\,d\Omega.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向.

解：由方向导数公式

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$= \nabla u\cdot\boldsymbol{n}. \quad (\boldsymbol{n}\text{ 为单位法向量})$$

所以由奥氏公式得

$$\iint_{S} v\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot(v\nabla u)\,d\Omega.$$

利用例 5 后的说明，有

$$\iint_{S} v\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla u\,d\Omega + \iiint_{\Omega} v\Delta u\,d\Omega,$$

即得

$$\iint_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla u\,d\Omega + \iiint_{\Omega} v\Delta u\,d\Omega.$$

这个公式是定积分分部积分公式的推广，在实际问题中非常有用.

习 题 七

1. 证明：

1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})=\operatorname{div}\boldsymbol{F}\pm\operatorname{div}\boldsymbol{G}$;

2) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot\operatorname{grad}u$ ($\boldsymbol{C}$ 为常向量).

2. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}f(r))$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 在什么情况下

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f(r))=0?$$

3. 计算: $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{C}]$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 为常向量.

4. 求 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]$, 在什么情况下此向量的散度为零?

5. 证明 由曲面 S 所包围的体积等于:

$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线方向余弦.

6. 计算下列第二型曲面积分:

1) $\oiint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, S: $x^2+y^2+z^2=a^2$;

2) $\oiint_S x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy$, 式中 S 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant a$ 与 $0\leqslant z\leqslant a$ 的外侧;

3) $\oiint_S x^2dy\,dz+x^2y\,dz\,dx+x^2z\,dx\,dy$, S 为下列曲面 $z=0$、$z=l$、$x^2+y^2=a^2$ 所围圆柱体的边界;

4) $\oiint_S xy^2dy\,dz+yz^2dz\,dx+zx^2dx\,dy$, S: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

7. 计算

$$\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS,$$

式中 S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的一部分, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为此曲面外法线方向余弦.

[提示: 加平面: $z=h$ 与 $x^2+y^2\leqslant h^2$ 后, 成为封闭曲面.]

8. 证明 若 S 为封闭曲面, 而 $\boldsymbol{l}$ 为任何固定方向, 则

$$\iint_S\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})dS=0,$$

$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线.

[提示 设 $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$ 为单位向量, 则 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=\cos(l,n)$.]

9. 计算

$$\oint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})dS,$$

式中 S: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

10. 计算

$$\oint\limits_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2}dS,$$

式中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

1) S: $x^2+y^2+z^2=a^2$;

2) S: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

3) S: 为不包含原点的封闭曲面.

11. 设 $u=u(x, y, z)$ 是三维调和函数,即满足方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

证明: 1) $\iint\limits_{S}u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega$;

2) 若 $u=u(x, y, z)$ 在边界面 S 上恒为零,则 u 在区域 Ω 上恒为零.

第八节 旋度与斯托克斯公式

8.1 旋度概念

与在讲梯度之前,先引入方向导数的概念一样,在讲旋度之前,我们先要引入方向旋量的概念.

以一桶水为例(图 3-47), 图中表示从上面看下去的水桶图. 桶里的水已被搅动过了, 图中向量表示水流速度 $\boldsymbol{V}$. 桶旁画了一个小翼轮, 假设这翼轮安置在一个没有摩擦的轴承上. 然后把小翼轮水平地放入水桶的中心, 翼轮就会沿反时针方向旋转起来. 无论把翼轮水平地放在桶内那一点, 由于翼

轮一边的水流速度较大，它都会被水推动而旋转起来．这时我们就说，桶内每一点都有绕轴承方向的方向旋量存在．

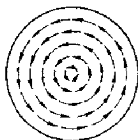


图 3-47

又如图 3-48 表示河道里的水流图，在接近水面处水的流速快，沿河床处水的流速较慢，虽然每一水质点作直线运动，若把翼轮垂直地放入河中，由于上面的水流速度比下面的快，所以翼轮就会顺时针方向旋转起来，我们就说翼轮所在的点，有绕轴承方向的方向旋量存在；若把翼轮水平地放入河中，则翼轮不会旋转，我们就说翼轮所在这点，绕现在的轴承方向的方向旋量为零．

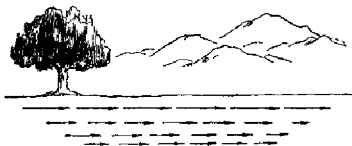


图 3-48

这例说明若向量场在每一点的方向相同，可以有不为零的方向旋量存在；还说明在同一点，由于方向不同，方向旋量可以不同．

怎么定量地来描述方向旋量呢？我们知道翼轮是否旋转，由翼轮边界所受作用力的力矩总和来决定．为简化起见，把翼轮理想化后，看成是一个半径为 r 的圆周，翼轮刚放入时其速度为零，经 $\Delta\tau$ 时间后，在 Δl 那一小段上受流速 V 的作用，

$\boldsymbol{V}$的垂直分量对翼轮旋转不起作用，所以我们只考虑它的切向分量 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$，这里 $\boldsymbol{t}$ 表示 Δl 上一点的单位切向量．并设 Δl 那一小段获得速度 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$，根据"动量的改变等于冲量"定律，我们来求翼轮所受的力矩．

设 ρ 是翼轮的线密度，$\rho\Delta l$ 为 Δl 那一小段翼轮的质量，$\rho\Delta l(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t})$ 即 Δl 小段切线方向的动量改变，F 表示 Δl 那一小段所受到的切向力，$F\Delta\tau$ 即为切线方向的冲量，因此

$$\rho\Delta l(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t})=F\cdot\Delta\tau.$$

由此可知 Δl 那一小段，在 $\Delta\tau$ 时间内受到的力矩为，

$$F\cdot r=\frac{\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t})\Delta l r}{\Delta\tau}.$$

对每一小段上的力矩加起来，取极限，即得到作用在翼轮上的总力矩：

$$\text{总力矩}=\frac{\rho r}{\Delta\tau}\int_L(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t})dl,$$

这里翼轮 L 的方向与翼轮轴承选定的方向 $\boldsymbol{n}$ 成右手系．

因线密度 ρ、半径 r 及考察时间 $\Delta\tau$ 不为零，所以若总力矩为零，即 $\int_L\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl=0$，则翼轮不旋转，我们就说翼轮所在点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量为零．若力矩不为零，即 $\int_L\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl\neq0$，则翼轮旋转，我们就说翼轮所在点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量存在，当 $\int_L\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl>0$ 时，旋转方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手系；当 $\int_L\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl<0$ 时，旋转方向与 $\boldsymbol{n}$ 成左手系．

翼轮旋转的快慢，不仅与 $\int_L\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl$ 有关，还与翼轮的半径有关．我们知道：

总力矩×时间＝转动惯量×角速度的改变量．

翼轮刚放入时，角速度为零，经时间 $\Delta\tau$ 后，角速度为 ω，又知圆周的转动惯量为

$$质量\times距离^2 = 2\pi r\rho\cdot r^2,$$

所以有

$$\frac{\rho r}{\Delta\tau}\int_L \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl\cdot\Delta\tau = 2\pi r\rho\cdot r^2\cdot\omega,$$

化简得

$$\frac{\int_L \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{\pi r^2} = 2\omega.$$

这式表明线积分除以 L 所围的面积，恰好是角速度的两倍，而角速度完全刻划翼轮绕轴承方向的旋转．这样，我们就可以引入向量场在 A 点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量的概念．

定义 给定向量场 $\boldsymbol{F}$ 及场中一点 A，由 A 点任意引一方向 $\boldsymbol{n}$，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量作一小平面 S（同时 S 也表示水平面的面积），它的边界记作 L，按 L 与 $\boldsymbol{n}$ 成右手螺旋法则确定 L 的正向（图 3-49），当 S 收缩成一点 A 时，如果下式极限

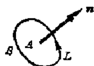


图 3-49

$$\lim_{S\to A}\frac{\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S}$$

存在，且与 S 形状无关，则称极限值为 $\boldsymbol{F}$ 在 A 点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量，记作 h_n，定义中的线积分称为 $\boldsymbol{F}$ 沿闭路 L 的"环量"，h_n 也称作 $\boldsymbol{F}$ 在 A 点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的"环量面密度"．

有了方向旋量的定义，我们即可引出旋度的概念．因为过 A 点可以引无数个方向，就可以在 A 点求出无数个方向旋量，比较这些方向旋量的大小，就获得旋度的定义．

定义 向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 A 点的旋度是一个向量，它的方向是使方向旋量达到最大的那个方向，它的大小就是绕该方向的方向旋量．

要使定义有意义，必须说明在 A 点的无数个方向旋量中，确实存在最大的方向旋量．下面就来说明这一点．

设给定一点 A，及一个方向 $\boldsymbol{n}$，以 A 点为顶点作一四面体，三面平行于坐标面，一面 BCD 使它的法向量恰好为 $\boldsymbol{n}$．三角形 BCD 的面积记为 S（图 3-50），三角形 ACD, ADB, ABC 的面积分别记为 S_x, S_y, S_z，根据投影关系有

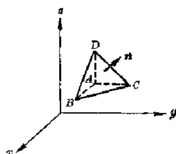


图 3-50

$$S=\frac{S_x}{\cos(n,\ x)}=\frac{S_y}{\cos(n,\ y)}=\frac{S_z}{\cos(n,\ z)},$$

这里我们先假设向量 $\boldsymbol{n}$ 的三个方向余弦均大于零的情形，至于有一个或几个方向余弦小于零时一样可以讨论．

现在 S 就取作方向旋量定义中的 S，当 S 收缩到 A 点的过程中，它的法向量永远保持为 $\boldsymbol{n}$．所以由方向旋量的定义，

$$h_n=\lim_{S\to A}\frac{\int_{BCDB}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S}.$$

上式分子中的线积分可以拆成三个闭路上线积分之和：

$$\int_{BCDB}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl=\int_{ACDA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl+\int_{ADBA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl+\int_{ABCA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl.$$

这是因为把上式右端每个分解成三个直线段上积分时，在直线段 AB, AC, AD 上的线积分出现两次，这两次中的线积分方向相反，正好抵消，剩下的加起来恰好是闭路 $BCDB$ 上的线积分．因此

$$h_n=\lim_{S\to A}\frac{\int_{ACDA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl+\int_{ADBA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl+\int_{ABCA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S}$$

$$=\lim_{S\to A}\left[\frac{\int_{ACDA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S_x}\cos(n,\ x)+\frac{\int_{ADBA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S_y}\cos(n,\ y)+\frac{\int_{ABCA}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S_z}\cos(n,\ z)\right],$$

当 S 收缩到 A 点时，要求其它三个面 S_x, S_y, S_z 永远与坐标面平行，且也收缩到 A 点，根据方向旋量的定义，即得：

$$h_n=h_x\cos(n,\ x)+h_y\cos(n,\ y)+h_z\cos(n,\ z).$$

上式表明，只要知道绕三个坐标轴方向的方向旋量，即可求出绕任一方向的方向旋量．我们引入向量 $\boldsymbol{h}$：

$$\boldsymbol{h}=(h_x,\ h_y,\ h_z),$$

则上式可写成

$$h_n=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{h}|\cos(\boldsymbol{h},\ \boldsymbol{n}).$$

式中因子 $|\boldsymbol{h}|$ 仅与点 A 有关，与 $\boldsymbol{n}$ 无关；而后一因子当 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 方向一致时，有最大值 1．所以当 $\boldsymbol{n}$ 取 $\boldsymbol{h}$ 方向时，方向旋量达到最大值，且最大值为 $|\boldsymbol{h}|$．这也证明了向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 A 点的旋度即为向量 $\boldsymbol{h}$，记作

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{h}=(h_x,\ h_y,\ h_z).$$

绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量就等于旋度在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影．

$$h_n=(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}.$$

向量场 $\boldsymbol{F}$ 中每一点都可以求它的旋度，不同的点旋度可以不同．这样，给定向量场 $\boldsymbol{F}$，伴随着一个新的向量场 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$.

若 rot $\boldsymbol{F}\neq 0$，称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为有旋场；若 rot $\boldsymbol{F}=0$，称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场.

8.2 旋度的计算

怎么求 A 点的旋度呢？由上述可知，只要求出绕三个坐标轴正向的方向旋量即成. 为了求 A 点绕 x 轴正向的方向旋量 h_x，我们以 $A(x, y, z)$ 为顶点作一小矩形，使它平行于 yz 平面，边长分别为 dy, dz. 小矩形边界记为 L，方向与 x 轴正向成右手螺旋规则（图 3-51）. 那么对于向量场

图 3-51

$$\boldsymbol{F}=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

我们来求线积分

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl$$

的主要部分.

把小矩形边界分成左、右、上、下四条线段，注意到左边线段的切线方向为 $-\boldsymbol{k}$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot(-\boldsymbol{k})dz=-R(x, y, z)dz;$$

注意到右边线段的切线方向为 $\boldsymbol{k}$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,dz=R(x, y+dy, z)dz=\left[R(x, y, z)+\frac{\partial R}{\partial y}dy\right]dz;$$

注意到下面线段的切线方向为 $\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}\,dy=Q(x, y, z)dy;$$

再注意到上面线段的切线方向为 $-\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{F}\cdot(-\boldsymbol{j})dy = -Q(x,\ y,\ z+dz)dy$$
$$= -\left[Q(x,\ y,\ z)+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right]dy.$$

把上面四个结果相加，即得“环量”$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl$的主要部分为：

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

L所围面积$S=dy\,dz$，因此

$$h_x=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

同理可以求出

$$h_y=\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),$$
$$h_z=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

所以对于A点的旋度向量为：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

为了便于记忆，我们采用算符写法：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{F}.$$

这说明$\boldsymbol{F}$的旋度就是算符向量∇与向量$\boldsymbol{F}$的向量积所得的向量.

【例 1】 求$\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$，其中$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

解:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

【例 2】 求 $\mathrm{rot}\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, 其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

解:

$$\mathrm{rot}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & \dfrac{z}{r}\end{vmatrix}$$

$$=\left(-\frac{yz}{r^3}+\frac{yz}{r^3}\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{zx}{r^3}+\frac{zx}{r^3}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(-\frac{xy}{r^3}+\frac{xy}{r^3}\right)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

【例 3】 求 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{r}$ 同上题, $\boldsymbol{a}$ 为常向量.

解: 设 $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=(\gamma y-\beta z)\boldsymbol{i}+(\alpha z-\gamma x)\boldsymbol{j}+(\beta x-\alpha y)\boldsymbol{k},$$

所以

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \gamma y-\beta z & \alpha z-\gamma x & \beta x-\alpha y\end{vmatrix}$$

$$=(-\alpha-\alpha)\boldsymbol{i}+(-\beta-\beta)\boldsymbol{j}+(-\gamma-\gamma)\boldsymbol{k}$$

$$=-2\boldsymbol{a}.$$

【例 4】 证明 $\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u\nabla\times\boldsymbol{F}$,

解：

$$
\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ uP & uQ & uR\end{vmatrix}
$$

$$
=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}R+u\frac{\partial R}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial z}Q+u\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{i}
$$

$$
+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}P+u\frac{\partial P}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}R+u\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{j}
$$

$$
+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}Q+u\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}P+u\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{k}
$$

$$
=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}R-\frac{\partial u}{\partial z}Q\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}P-\frac{\partial u}{\partial x}R\right)\boldsymbol{j}\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial x}Q-\frac{\partial u}{\partial y}P\right)\boldsymbol{k}\right]+u\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]
$$

$$
=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u\nabla\times\boldsymbol{F}.
$$

$F=Pi+Qj+Rk.$

$$
\nabla u\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}
$$

8.3 斯托克斯公式

已知向量场 $\boldsymbol{F}$ 在 A 点绕 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向旋量，就是 A 点的旋度在 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影，即

$$
h_n=\lim_{S\to A}\frac{\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl}{S}=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n},
$$

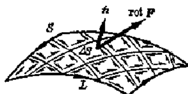


图 3-52

根据这一局部关系式，我们来建立整体的关系式，设 S 为一空间曲面，它的边界为 L. L 的方向与 S 取定的法线方向成右手系. 用一些曲线网把 S 分成 m 个小块 $\Delta S_i\,(i=1,\,2,\,\cdots,\,m)$，$\Delta S_i$ 的边界记为 $\Delta L_i\,(i=1,$

$2, \cdots, m$)（图 3 52）. 当分割充分细时，每个 ΔS_i 近似看成平面，设 A_i 为 ΔS_i 上任意一点，该点旋度记为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}_i$，法向量记为 $\boldsymbol{n}_i$，则由上式得近似等式：

$$\int_{\Delta l_i} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl \approx \operatorname{rot}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta S_i.$$

对 i 求和时，注意若 ΔS_i 与 ΔS_{i+1} 为相邻的两小块，相加时，这两小块的公共边界上的线积分正好出现两次，但这两公共边界上的线积分方向相反，故恰好抵消. 这样对 i 求和时，所有公共边界上的线积分都两两抵消，剩下的是 L 上的线积分，所以

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl \approx \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rot}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{n}_i\,\Delta S_i$$

令 $|\Delta S|\to 0$，就得到斯托克斯公式：

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\,dl = \iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS.$$

设 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$，则公式可写成分量形式（$\boldsymbol{t}\,dl=(dx, dy, dz)$）.

$$\begin{aligned}&\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz\\&=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,\end{aligned}$$

或
$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS.$$

这样，我们就有下面定理.

定理7 设 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$ 在包含曲面 S 的区域上具有连续偏导数，S 的边界为 L，L 的方向与 S 的法线方向组成右手系．则有

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

【证明】 我们对特殊曲面 S 加以证明．设曲面 S 既可以用 $z=z(x, y)$ 表示，又可以用 $x=x(y, z)$ 表示，还可以用 $y=y(x, z)$ 表示．要证斯托克斯公式，只要证明下面三个公式成立：

$$\int_L P\,dx=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\,dS-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,dS,$$

$$\int_L Q\,dy=\iint_S\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma\,dS-\iint_S\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\,dS,$$

$$\int_L R\,dz=\iint_S\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha\,dS-\iint_S\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\,dS.$$

我们以第三个公式为例加以证明．设曲面 S 的方程为 $z=z(x, y)$，S 在 xy 平面上的投影区域为 σ，曲线 L 的投影曲线为 λ，它是区域 σ 的边界．并设 λ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

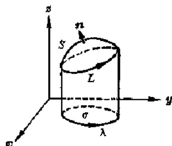


图 3 53

曲面 S、曲线 L、曲线 λ 的方向见图 3 53，设 t 自 α 增至 β 时，对应曲线 λ 的正向，那末 L 的参

数方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(x(t),\ y(t)), \end{cases}$$

当 t 自 α 增至 β 对应 L 的正向.

由第二型曲线积分计算公式,得

$$\int_L R\,dz = \int_\alpha^\beta R(x(t),\ y(t),\ z(x(t),\ y(t))) \times \left[\frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t) \right] dt.$$

若把上面定积分看成曲线 λ 上的曲线积分计算公式，那末可得

$$\int_L R\,dz = \int_\lambda R(x,\ y,\ z(x,\ y)) \frac{\partial z}{\partial x} dx + R(x,\ y,\ z(x,\ y)) \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

再应用格林公式得

$$\begin{aligned} \int_L R\,dz = & \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right] dx\,dy \\ = & \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx\,dy - \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} dx\,dy. \end{aligned}$$

而曲面 S 的法向量

$$\boldsymbol{N} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x},\ -\frac{\partial z}{\partial y},\ 1 \right),$$

根据第二型曲面积分计算公式,有

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha\, dS - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\, dS$$

$$= \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy - \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$$= \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\, dx\, dy - \iint_\sigma \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\, dx dy.$$

比较曲线积分与曲面积分计算结果，即得

$$\int_L R\, dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha\, dS - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\, dS.$$

同理可证其余两个公式．所以斯托克斯公式成立．∎

斯托克斯公式揭示了曲面积分与曲线积分之间的联系，我们可以利用这个联系来求曲线积分．

【例 5】 计算曲线积分

$$\int_L y\, dx + z\, dy + x\, dz,$$

L 为圆球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线，方向由 (R, O, O) 出发，先经过 $x>0$，$y>0$ 部分，再经 $x>0$，$y<0$ 部分回到出发点(图 3-54)．

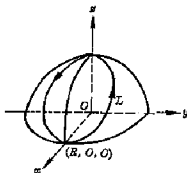


图 3-54

解：记平面 $x+z=R$ 上被 L 所围的部分为 S，S 的方向向上．平面 $x+z=R$ 的法向量

$$\boldsymbol{N}=(1, 0, 1),$$

所以方向余弦为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

由斯托克斯公式得

$$\int_L y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_S \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dS$$

$$= -\sqrt{2} \iint_S dS.$$

注意 S 是一半径为 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ 的圆，所以

$$\int_L y\,dx + z\,dy + x\,dz = -\sqrt{2} \cdot \pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{\sqrt{2}\,\pi R^2}{2}.$$

在第六节讨论保守场判别法时，我们提到定理 5 的叙述与证明只适用于平面情形，而对空间情形要另加讨论．有了斯托克斯公式后，我们可以回答定理 5 的空间情形．

平面情形要求区域是单连通，实质在于区域中任一闭曲线所围的区域都在原区域之内，证明用的就是这个性质．在空间情形，我们要求区域内任一闭路 $\boldsymbol{L}$，总可以作一个以 $\boldsymbol{L}$ 为边界的曲面 S，使 S 整个位于原区域内．只要区域有这个性质就可应用斯托克斯公式．例如两个同心圆球面围成的区域，虽然它不是空间单连通区域，但它具有上述性质．又如圆环区域，虽然它是空间单连通区域，但它不具备上述性质．

对具备上述性质的区域上，向量场 $\boldsymbol{F}$ 是保守场的充分必要条件为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = 0.$$

事实上，若 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = 0$，由斯托克斯公式

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\,dl = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,dS = 0,$$

得 $\boldsymbol{F}$ 沿区域内任一闭路积分为零，所以由定理 4 知 $\boldsymbol{F}$ 是保守场. 反之，若 $\boldsymbol{F}$ 是保守场，总存在一势函数 $u(x, y, z)$，使得 $\operatorname{grad} u = \boldsymbol{F}$，而

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0.$$

这就证明了定理 5 的空间情形.

习 题 八

1. 设 $\boldsymbol{F} = (y-z)\boldsymbol{i} + (z-x)\boldsymbol{j} + (x-y)\boldsymbol{k}$，求
   1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$;
   2) $(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{F}$;
   3) $(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) \times \boldsymbol{F}$.
2. 证明: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.
3. 求:
   1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{C} f(r)$;
   2) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{C} \times f(r)\boldsymbol{r}]$.

   其中 $\boldsymbol{C}$ 为常向量.
4. 求:
   1) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$;
   2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F})$.
5. 证明:
   1) $\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G})$;
   2) $\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}$.
6. 计算下列曲线积分
   1) $\oint_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$，式中 L 为圆周: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$，若从 Ox 轴的正向看去，这圆周是依逆时针方向进行的;
   2) $\oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$，式中 L 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$，与 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\ (a > 0,\ h > 0)$，若从 Ox 轴正向看去，此椭圆是依逆时针方向进行的;

3) $\oint_L (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$，式中 L 是曲线：$x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx\ (0<r<R,\ z>0)$，被圆柱 $x^2+y^2=2rx$ 截下曲面的上侧与 L 方向成右手系；

4) $\oint_L (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$，式中 L 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体：$0\leqslant x\leqslant a$ 与 $0\leqslant y\leqslant a$ 与 $0\leqslant z\leqslant a$ 的表面所得的切痕，从 Ox 轴的正向看去，L 是依逆时针方向进行的.

第九节　向量的外积与外微分形式

在第二和第三章中，我们已分别学习了二维与三维空间中各种类型的积分及它们之间的相互联系．如果运用了一些近代的代数和几何的概念，就能对上述各类的积分用统一的观点给以概括．为此，我们在这一节中将介绍有关向量的外积和外微分形式这两个概念．由于对读者来说这两个数学工具是前面未接触过的新概念，所以我们只准备把它们的基本思想以及怎样利用这些概念把所学过的各类积分（诸如：格林公式、斯托克斯公式、奥氏公式、重积分的变量变换公式，……等等）统一起来作个简要的介绍，而不过分注重它们在逻辑上的严格性．但是，通过所介绍的这些思想，对大家能用统一的观点把前面所讲的各种积分给予总结，从而更好地理解和掌握它们，肯定是很有好处的．

9.1　引言

在解析几何中我们知道一向量 $\boldsymbol{a}$，就表示一有向线段，向量基 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 也可以说是有向线段基．任何一个空间向量 $\boldsymbol{a}$，总可以通过有向线段基表示出来：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

其中 a_1、a_2、a_3 就是有向线段在两两正交且每个长度为1的有向线段基 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 上的投影．有了这个表示式后，对求有向线段的长度，两个有向线段间的夹角就非常方便．如有向线段的长度为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

那么对面积，能否也引入有向面积和两两正交的有向面积基的概念呢？若有的话，这对处理面积问题会带来很大方便．下面我们将说明这对平行四边形是可以的．如给定有向线段 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$．那么由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的有向平行四边形面积就用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 来表示，两两正交的有向面积基用 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$ 来表示．因为

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\end{cases}$$

由向量积规则，我们知道

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\ &=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\ b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\ b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

这样就把空间中有向面积，通过两两正交的有向面积基表示出来了．由第二章第五节知，行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{vmatrix},$$

就是有向平行四边形 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在 xy 平面上的投影．同理上式中

第一、第二个行列式是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在 yz 平面、zx 平面上的投影. 有了上面表示式, 要求有向面积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的大小 (记作 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$) 就很容易, 因为我们有

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2}.$$

同样, 对平行六面体我们亦可以引入有向体积及有向体积基的概念. 设给定向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$, 我们称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为有向体积, 称 $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{k}$ 为有向体积基, 在三维空间只有一个有向体积基. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同上, $\boldsymbol{c}$ 为

$$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k},$$

则
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{k}.$$

有了这个表示式, 体积 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 即可记为:

$$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{matrix}\right\|.$$

上面记号表示对行列式取绝对值.

9.2 向量的外积

当把上面这些讨论推广到高维空间时, 有向线段及有向线段基的推广非常容易, 而要把有向面积及有向面积基, 和有向体积及有向体积基推广时, 原来的向量积运算发现已不能适用, 需要引入关于向量的新的运算, 这就是向量外积的运算.

我们以四维空间为例加以推广. 称四个有序的实数组

(a_1, a_2, a_3, a_4) 为一向量，记作

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

所有这种可能的实数组作成的集合，若满足下面两条性质：

1) $\alpha(a_1, a_2, a_3, a_4)=(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4)$；

2) $(a_1, a_2, a_3, a_4)+(b_1, b_2, b_3, b_4)$
$=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4)$，

其中 α 为实数，则称这个实数组的集合为四维空间。

我们先把两向量的数量积运算推广至四维空间。这时原来的定义已不适用，因四维空间中向量的"长度"和"两向量的夹角"的概念还没有，更谈不上用它来定义两向量的数量积。所以我们用下面式子作为四维空间中两向量数量积的定义，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，具体说来是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{4} a_i\cdot b_i.$$

上式右端意义是明确的，它表示一个实数，所以两向量的数量积为一实数。

反过来，我们可以定义四维空间中一向量的长度和两向量的夹角。记向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记为 $|\boldsymbol{a}|$，两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则它们的定义为：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

其中 $$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}a_i^2}.$$

为使上式的定义有意义，必须首先证明等式右端的绝对值小于1，即要证明不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{4} a_i\cdot b_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{4}a_i^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{4}b_i^2\right)^{1/2}$$

成立．而这件事情是对的，利用一元函数的极值便可证明，我们把它留给读者作为练习．

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，我们称两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交；若 $|\boldsymbol{a}|=1$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量．因此，在四维空间中同样存在一组（四个）两两正交的单位基：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1&=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\\
\boldsymbol{e}_2&=(0,\ 1,\ 0,\ 0),\\
\boldsymbol{e}_3&=(0,\ 0,\ 1,\ 0),\\
\boldsymbol{e}_4&=(0,\ 0,\ 0,\ 1).
\end{aligned}
$$

它们满足
$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

有了单位正交基后，四维空间中任一向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$$

总可表示成这组基的线性组合：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3+a_4\boldsymbol{e}_4.$$

分量 a_1、a_2、a_3、a_4 也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_4$ 上的投影．这样就把有向线段情形推广到四维空间来了．

把有向面积情形推广到四维空间时，要注意这时两两正交的坐标平面共有六个，即由 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_4$、$\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_4$、$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}_4$ 所决定的平面．所以四维空间中有向面积基也就应有六个，这不象在三维空间中有向面积基的个数与有向线段基的个数一样，从而我们可以借用有向线段基来表示有向面积基，面现在无法借用有向线段基表示有向面积基，只能把有向面积基作为与有向线段基独立并存的东西提出来．为此，我们引入向量外积的运算，记作

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b},$$

符号“∧”表示外积运算．两向量的外积运算是三维空间中向

量积运算的推广，但向量积运算结果仍为一向量，而现在外积运算的结果，是一个新的量，表示由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 决定的有向面积.

既然外积运算是向量积的推广，它应具有向量积的运算规则：

1) $\alpha(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$（$\alpha$ 为实数）；

2) $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

3) $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$.

我们对外积运算要求符合上面三条规则，是合情合理的. 第三条规则称为反交换律，由此可推出

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}=0.$$

此外还要求外积运算符合结合律：

4) $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}$.

这条规则与向量积规律不同，从概念上来说已不是两个有向线段的外积，而是有向线段与有向面积的外积，结果表示有向体积. 根据结合律，$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$，就有了唯一的意义. 这样，我们有

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\wedge\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

这里记号 $\boldsymbol{0}$ 既可以看成面积为零的有向面积，也可以看成体积为零的有向体积. 上式说明向量外积式中，若有两个向量相同，则其外积式必为零；

又如

$$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}.$$

这式说明一个向量的外积式，若可以通过另一个向量的外积式交换奇数次向量的位置而得到的话，则这两向量的外积式必相差一符号.

注意，我们引入的外积运算，对三维空间也是适用的. 先

来看看三维空间中外积运算情形. 设给定

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 是三维空间的正交基. 则

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3),$$

利用外积的运算规则, 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}&=a_1b_2\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+a_1b_3\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3+a_2b_1\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\\&\quad+a_2b_3\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+a_3b_1\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1+a_3b_2\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\\&=(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\\&\quad+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\\&=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\\&\quad+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1.\end{aligned}$$

用 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所确定的面积, 由面积基的正交性, 得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}^2}.$$

又给定向量 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}&=\left(\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\right.\\&\quad\left.+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\right)\wedge(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3)\\&=c_3\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+c_1\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\\&\quad+c_2\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

$$= \left(c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right) \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3.$$

我们称 $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ 为有向体积基，则由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所确定的体积 $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}|$ 为

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

若三维空间中再给定向量 $\boldsymbol{d} = d_1 \boldsymbol{e}_1 + d_2 \boldsymbol{e}_2 + d_3 \boldsymbol{e}_3$，容易看出

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge \boldsymbol{d} = 0.$$

我们现在再来看四维空间中的外积运算．设给定向量

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3 + a_4 \boldsymbol{e}_4,$$

$$\boldsymbol{b} = b_1 \boldsymbol{e}_1 + b_2 \boldsymbol{e}_2 + b_3 \boldsymbol{e}_3 + b_4 \boldsymbol{e}_4,$$

则

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i \boldsymbol{e}_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{4} b_i \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} (a_i b_j - b_i a_j) \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{4} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j,$$

求和记号表示 $i=1$ 时，j 取 2 到 4 的值，共得三项；$i=2$ 时，j 取 3 到 4 的值，共得两项；$i=3$ 时，j 取 4，得一项．总起来求和号共有六项．由面积基的正交性，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所确定的面

积 $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|$ 为

$$|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}|=\sqrt{\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{4}\begin{vmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}^2}.$$

又给定向量 $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3+c_4\boldsymbol{e}_4$，则

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=\left(\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{4}(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\right)\left(\sum_{k=1}^{4}c_k\boldsymbol{e}_k\right)$$

$$=\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{4}\begin{vmatrix}a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k.$$

求和记号表示 $i=1,\ j=2$ 时，k 取 3 到 4 的值，共得两项；$i=1,\ j=3$ 时，k 取 4，得一项；$i=2,\ j=3$ 时，k 取 4，得一项，求和号总共有四项．由体积基的正交性，向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所确定的体积 $|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}|$ 为

$$|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}|=\sqrt{\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{4}\begin{vmatrix}a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{vmatrix}^2}.$$

再给定向量 $\boldsymbol{d}=d_1\boldsymbol{e}_1+d_2\boldsymbol{e}_2+d_3\boldsymbol{e}_3+d_4\boldsymbol{e}_4$，则

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\wedge\boldsymbol{d}$$

$$=\left(\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{4}\begin{vmatrix}a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k\right)\wedge\left(\sum_{e=1}^{4}d_e\boldsymbol{e}_e\right)$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4,$$

所以由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 所确定的四维体积为

$$|a\wedge b\wedge c\wedge d| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}\right|.$$

由上可见，向量的外积运算是一种非常简单的运算，利用这种运算我们解决了任何维空间中求面积、体积等问题.

9.3 外微分

有了向量的外积概念后，我们可以定义区域上的 k 阶外微分形式，及对 k 阶外微分形式求外微分运算. 为简单起见，我们只讨论三维空间情形.

设函数 $f(x, y, z)$，$f_i(x, y, z)$ $(i=1, 2, 3)$ 在空间区域 V 上连续，定义下面的式子：

$$\omega_0=f(x, y, z),$$

$$\omega_1=f_1(x, y, z)dx+f_2(x, y, z)dy+f_3(x, y, z)dz,$$

$$\omega_2=f_1(x, y, z)dx\wedge dy+f_2(x, y, z)dy\wedge dz$$
$$+f_3(x, y, z)dz\wedge dx,$$

$$\omega_3=f(x, y, z)dx\wedge dy\wedge dz,$$

分别为区域 V 上的 0 阶、1 阶、2 阶、3 阶的外微分形式. 所以零阶外微分形式就是通常的实函数；一阶外微分形式(不一定是通常微分)是 f_1 乘以 x 轴上的有向线段微元，加上 f_2 乘以 y 轴上有向线段微元，再加上 f_3 乘以 z 轴上的有向线段微元；二阶外微分形式是 f_1 乘以 xy 平面上的有向面积微元，加上 f_2 乘以 yz 平面上的有向面积微元，再加上 f_3 乘以 zx 平面上的有向面积微元；三阶外微分形式是函数 f 乘以空间有向体积微元.

如果函数 $f(x, y, z)$，$f_i(x, y, z)$ $(i=1, 2, 3)$ 在区域 V 上有连续的偏导数，我们可以对上面各阶外微分形式求外微分运算，其定义为

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

$$\begin{aligned} d\omega_1 = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \wedge dz, \end{aligned}$$

利用外积的运算规律得

$$\begin{aligned} d\omega_2 = & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) dx \wedge dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_2 = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx \\ = & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

$$d\omega_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

可见，零阶外微分形式求外微分得一阶外微分形式；一阶外微分形式求外微分得二阶外微分形式；二阶外微分形式求外微分得三阶外微分形式，三阶外微分形式求外微分后为零。

有了外微分形式和外微分运算，我们可以用统一观点将

前面学过的积分加以总结.

前面我们学过的积分可分为无定向积分和定向积分. 如第一型曲线积分和曲面积分是无定向积分, 二重积分和三重积分若不与其区域边界上的积分相联系时, 也可以作为无定向积分处理. 对于无定向积分, 有向面积微元 $dx\wedge dy$ 只考虑大小, 不考虑方向, 所以

$$|dx\wedge dy|=dx\,dy,$$

重积分也可记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,|dx\wedge dy|.$$

若作变量变换

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \end{cases}$$

把区域 $\triangle$ 一一对应地变到区域 D, 则上面重积分中 dx, dy 用它的外微分代入, 有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,|dx\wedge dy|$$

$$=\iint\limits_\triangle f(x(u,v),\,y(u,v))$$

$$\times\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\right|$$

$$=\iint\limits_\triangle f(x(u,v),\,y(u,v))\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\wedge dv\right|$$

$$=\iint\limits_\triangle f(x(u,v),\,y(u,v))\,|J(u,v)|\,|du\wedge dv|$$

$$=\iint\limits_\triangle f(x(u,v),\,y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv.$$

这就是重积分的变换公式. 同样，三重积分的变量变换若用外微分记号的话，可变得非常简洁、明了. 设变换

$$\begin{cases} x=x(u,\ v,\ w), \\ y=y(u,\ v,\ w), \\ z=z(u,\ v,\ w). \end{cases}$$

把空间区域 Ω 一一对应地变为区域 V，则有

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,|dx\wedge dy\wedge dz|$$

$$=\iiint_\Omega f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))$$

$$\times\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial w}dw\right)\right.$$

$$\wedge\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv+\frac{\partial y}{\partial w}dw\right)$$

$$\left.\wedge\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv+\frac{\partial z}{\partial w}dw\right)\right|$$

$$=\iiint_\Omega f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))$$

$$\times|J(u,\ v,\ w)|\,du\,dv\,dw.$$

在第一型曲面积分计算中，设曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(u,\ v), \\ y=y(u,\ v), \\ z=z(u,\ v). \end{cases}$$

$(u,\ v)$ 在区域 Δ 上变动. 则由

$$dS=\sqrt{|dy\wedge dz|^2+|dz\wedge dx|^2+|dx\wedge dy|^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ |du\wedge dv|,$$

所以

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_\Delta f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

$$\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv.$$

另外一种积分，它不仅考虑区域的大小，还考虑区域的方向，称为有定向的积分．如第二型曲线、曲面积分就是有定向的积分．凡讨论区域上的积分与其边界上的积分联系时，无论区域上的积分还是边界上的积分，都要求是有定向的积分，如格林公式揭示了平面区域 D 上积分与其边界 L 上的第二型线积分之间的联系，若用外微分形式来写，为：

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D d(P\,dx+Q\,dy)$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx+\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)\wedge dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx+\frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\right)\wedge dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

当边界 L 取逆时针方向时，由图 3–55 看出，面积微元 $dx\wedge dy$ 的方向与面积基 $i\wedge j$ 的方向一致，所以

$$dx\wedge dy=dx\,dy,$$

若边界 L 取顺时针方向时，由图 3–56 看出，面积微元 $dx\wedge dy$ 的方向与面积基 $i\wedge j$ 的方向相反，所以

$$dx\wedge dy=-dx\,dy.$$

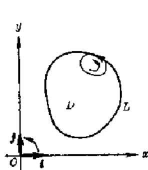


图 3.55

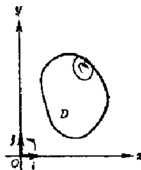


图 3.56

若用ω表示 $(P\,dx+Q\,dy)$，则格林公式可写成

$$\int_L \omega=\iint_D d\omega.$$

同样，对斯托克斯公式用外微分来写，即为：

$$\begin{aligned}
&\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz\\
&=\iint_S d(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)\\
&=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\
&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\
&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz\\
&=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\
&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

当边界 L 方向确定时，S 上面积微元的方向也随之而定（图

3-57)，根据右手定则，曲面 S 的法向量取法也随之而定．若用 ω 表示 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$，则公式可记为

$$\int_L \omega=\iint_S d\omega.$$

奥氏公式用外微分来写，为：

$$\begin{aligned}
&\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy\\
&=\iiint_V d(P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy)\\
&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz\\
&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx\\
&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy\\
&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

当曲面 S 取外法线方向时，由图 3-58 看出，曲面 S 上的面积

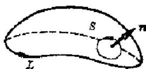


图 3-57

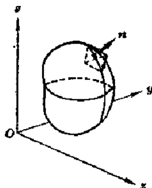


图 3-58

微元方向随之而定，因此体积微元的方向也随之而定，这时体积微元的方向与有向体积基 $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}$ 的方向一致，所以

$$dx\wedge dy\wedge dz=dx\,dy\,dz;$$

反之，若 S 取内法线方向时，体积微元的方向与 $\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}$ 方向相反，所以

$$dx\wedge dy\wedge dz=-dx\,dy\,dz.$$

若记 ω 为 $P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$，则奥氏公式可记为

$$\iint\limits_S\omega=\iiint\limits_V d\omega.$$

可见，这些公式的形式非常一致，我们可以把它们统一成一句话：k 阶外微分形式 ω 在 k 维区域上的积分，等于 $k+1$ 阶外微分形式 $d\omega$ 在 k 维区域所围的 $k+1$ 维区域上的积分。

最后关于第二型曲面积分

$$\iint\limits_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy,$$

当曲面由参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,\ v),\\ y=y(u,\ v),\\ z=z(u,\ v)\end{cases}$$

给出，$(u,\ v)$ 在区域 $\triangle$ 上变化，因

$$\begin{cases}dy\wedge dz=\dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv,\\[2mm] dz\wedge dx=\dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv,\\[2mm] dx\wedge dy=\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}du\wedge dv,\end{cases}$$

所以

$$\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$
$$=\iint\left(P\cdot\frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}+Q\,\frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}+R\,\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right)du\wedge dv.$$

S 上的面积微元方向，决定了相应 uv 平面上面积微元的方向. 当该方向与 uv 平面上面积基的方向一致时，有

$$du\wedge dv=du\,dv;$$

否则

$$du\wedge dv=-du\,dv.$$

第三章小结

1．第一型积分是无方向积分，第二型积分是有方向积分，所以要求曲面是双侧曲面. 第二型积分给出了一种表示法.

2．数量场中有等位面与梯度两个概念. 向量场中有通量、散度、环量、环量面密度(方向旋量)、旋度等概念. 散度为一数量，旋度为一向量. 演算时常用哈密尔顿算符 ∇，和拉普拉斯算符 Δ.

3．格林公式、奥氏公式、斯托克斯公式，都是微积分基本公式的推广. 但它们又可看成更一般的斯托克斯公式:

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D d\omega$$

的特例.

4．一向量场具有势函数和线积分与路径无关是等价的，这种场称为保守场或有势场. 而保守场与无旋场等价，需要对区域加以限制. 如平面情形要求区域是单连通.

习 题 答 案

第 一 章

习题一 1. 1) 区域; 2) 闭区域; 3) 区域; 4) 区域; 5) 闭区域; 6) 区域; 7) 区域; 8) 非区域或两个区域组成的集合.

2. 不一定是区域.

4. 1) 凸域; 2) 非凸域; 3) 凸域; 4) 非凸域.

习题二 1. 1) 是; 2) 是; 3) 是; 4) 是.

2. 1) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; 2) $z=|x|$; 3) $z=x+y$; 4) $z=|x-y|$.

3. 1) 否; 2) 是.

4. $f(t)=2t+t^2$, $z=x-1+\sqrt{y}\ (x>0)$.

习题三 1. 1) $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$; 2) $x+y<0$; 3) $r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$; 4) $2\pi k\leqslant x^2+y^2\leqslant \pi(2k+1)$, $(k=0, 1, \cdots)$; 5) $|y|\leqslant|x|$, $(x\neq 0)$.

2. 1) 关于 y 轴对称; 2) 关于 x 轴对称; 3) 关于原点对称; 4) 关于直线 $y=x$ 对称.

习题四 1. 1) 顶点在 $(0, 0, 1)$, 开口向下的圆锥; 2) 开口向上的椭圆抛物面; 3) 单叶双曲面; 4) 曲面与平面 $x=y$ 交线为 $z=|x|$, 曲面与 $z=C>0$ 的交线为双曲线 $xy=C^2$.

2. 1) 图形为绕 z 轴旋转所得的曲面; 2) 图形在每条射线 $y=x$ 上为一常数.

习题五 1. 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 0; 5) e; 6) $\ln 2$.

2. 1) 沿 $y=x$ 极限为 1, 沿 x 轴极限为 0, 故在原点极限不存在; 2) 沿 x 轴极限为 0, 沿 $y=x^2$ 极限为 $\frac{1}{2}$, 故在原点极限不存在

习题六 1. 1) 在 $-\infty<x<+\infty$ 与 $-\infty<y<+\infty$ 上连续; 2) 在 $x^2-y^2<+\infty$ 上连续; 3) 在 $x^2+y^2<+\infty$ 上连续; 4) 在 $x>0$ 与 $y>0$ 上连续.

4. $f(x,y)=\frac{|f(x,y)|+f(x,y)}{2}-\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}$.

习题七　2　根据闭域 D 上连续函数 $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 有最大值与最小值，所以在 D 存在最远点与最近点.

习题八　1. 1) $z'_x=4x^3-8xy^2$, $z'_y=4y^3-8x^2y$; 2) $z'_x=y+\frac{1}{y}$, $z'_y=x-\frac{x}{y^2}$; 3) $z'_x=\frac{1}{y^2}$, $z'_y=-\frac{2x}{y^3}$; 4) $z'_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $z'_y=x\cos(x+y)$; 5) $z'_x=-\frac{2x\sin x^2}{y}$, $z'_y=-\frac{\cos x^2}{y^2}$; 6) $z'_x=\frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y}$, $z'_y=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y}$; 7) $z'_x=\frac{1}{x+y^2}$, $z'_y=\frac{2y}{x+y^2}$; 8) $z'_x=\frac{1}{1+x^2}$, $z'_y=\frac{1}{1+y^2}$; 9) $z'_x=\frac{|y|}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\frac{x|y|}{y(x^2+y^2)}$, 10) $u'_x=-\frac{x(1+r)}{r^3}e^{-r}$, $u'_y=-\frac{y(1+r)}{r^3}e^{-r}$, $u'_z=-\frac{z(1+r)}{r^3}e^{-r}$; 11) $u'_x=yz(xy)^{z-1}$, $u'_y=xz(xy)^{z-1}$, $u'_z=(xy)^z\ln(xy)$; 12) $u'_x=y\ln z\cdot z^{xy}$, $u'_y=x\ln z\cdot z^{xy}$, $u'_z=xy\cdot z^{xy-1}$.

2. 1) $z'_x=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z'_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z'_x(0,1)=1$, $z'_y(0,1)=0$, $z'_x(1,0)=0$, $z'_y(1,0)=0$, 2) $z'_x(x,1)=1$, $z'_x(0,1)=1$, $z'_y(0,y)=1$, $z'_y(0,1)=1$.

3.
$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

4. $z'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{x}$, $z'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{y}$.

5. $z'_x=f'\times\left(\frac{1}{x}\right)$, $z'_y=f'\times\left(-\frac{1}{y^2}\right)$.

6. $z'_x=nx^{n-1}f+x^nf'\times\left(-\frac{2y}{x^3}\right)$, $z'_y=x^nf'\times\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

习题九　1　浴盆的尺寸：$\sqrt[3]{2V}$，$\sqrt[3]{2V}$，$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

2. 平行六面体的尺寸：a, b, $\frac{c}{2}$.

3　平行六面体的尺寸：$\frac{2\sqrt{2}}{3}h$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}h$, $\frac{1}{3}h$.

4. 正三角形面积最大，最大面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

5. 正 n 边形时有最大面积 $\frac{R^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$。

6. $x=8\text{cm}$, $\alpha=60^\circ$。

7. $a=-\frac{1}{6}$, $b=1$。

8. $a=0$, $b=2$, $c=0$。

习题十　1. 1) $2x+4y-z-5=0$; 2) $3x+3y+z-4=0$。

2. $z=x+y-\frac{1}{2}$。

5. 1) $du=mx^{m-1}y^n dx+nx^m y^{n-1}dy$; 2) $du=\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$; 3) $du=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 4) $du=e^{xy}(y\,dx+x\,dy)$; 5) $du=-\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}dx-\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}dy+\frac{1}{(x^2+y^2)}dz$; 6) $du=-\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}}$。

6. $f'_x=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$;

$f'_y=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$。

习题十一　1. $\Delta V\approx 10.2$ 米^3。

2. 7.6 米。

3. 34.54 公斤。

4. 1) 108.972; 2) 2.95; 3) 0.502; 4) 0.97。

习题十二　1. 1) $\frac{du}{dt}=-\frac{10}{(2e^t-e^{-t})^2}$; 2) $\frac{du}{dt}=2e^t\sin t$。

3. 1) $u'_x=2(x-2y+3z)$, $u'_y=-4(x-2y+3z)$, $u'_z=6(x-2y+3z)$; 2) $u'_x=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $u'_y=-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $u'_z=-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$; 3) $u'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{x-y}{(x+y)x}$, $u'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{x-y}{(x+y)y}$; 4) $u'_x=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}$, $u'_y=-\frac{x}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}+\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$, $u'_z=-\frac{y}{z^2}\left(\ln\frac{x}{y}\right)\times\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$。

习题十三

1. 1) $z'_x=\dfrac{(x^2-y^2)y\sin\dfrac{y}{x}-2x^3\cos\dfrac{y}{x}}{x^2(x^2-y^2)^2}$, $z'_y=\dfrac{(y^2-x^2)\sin\dfrac{y}{x}+2xy\cos\dfrac{y}{x}}{x(x^2-y^2)^2}$;

2) $z'_x=\dfrac{2+2xy}{1+(2x-y^2+x^2y)^2}$, $z'_y=\dfrac{x^2-2y}{1+(2x-y^2+x^2y)^2}$;

3) $z'_x=y(x+y)^{-1}e^{xy\sin\ln(x+y)}[(x+y)\sin\ln(x+y)+x\cos\ln(x+y)]$,

$z'_y=x(x+y)^{-1}e^{xy\sin\ln(x+y)}[(x+y)\sin\ln(x+y)+y\cos\ln(x+y)]$;

4) $z'_x=-12x+5y$, $z'_y=5x-2y$.

2. 1) $u'_x=af'_1$, $u'_y=bf'_2$; 2) $u'_x=f'_1+yf'_2$, $u'_y=f'_1+xf'_2$; 3) $u'_x=f'_1+2xf'_2$, $u'_y=f'_1+2yf'_2$, $u'_z=f'_1+2zf'_2$; 4) $u'_x=\dfrac{1}{y}f'_1$, $u'_y=-\dfrac{x}{y^2}f'_1+\dfrac{1}{z}f'_2$, $u'_z=-\dfrac{y}{z^2}f'_2$; 5) $u'_x=2xf'_1+2xf'_2+2yf'_3$, $u'_y=2yf'_1-2yf'_2+2xf'_3$; 6) $u'_x=2xf'$, $u'_y=2yf'$, $u'_z=2zf'$.

4. $z=f(xy)$，f 为任一可微函数。

5. $u=f(y-x, z-x)$，f 为任一二元可微函数。

6. $F(x, y)=\dfrac{C_1}{2}(x^2+y^2)+C_2$，其中 C_1, C_2 为任意常数。

7. $F(x, y)=C_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 C_1, C_2 为任意常数。

习题十四 1. $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=-\dfrac{2u}{v}$, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=-\dfrac{1}{2y}$.

2. $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=-\dfrac{1}{(u^2+v^2)^2}$, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=-\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

3. $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}=r$.

4. $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}=r$.

5. $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}=\rho^2\sin\varphi$.

习题十五 1. 1) $z'_x=-\dfrac{x^{n-1}}{z^{n-1}}$, $z'_y=-\dfrac{y^{n-1}}{z^{n-1}}$; 2) $z'_x=z'_y=-1$; 3) $z'_x=\dfrac{z}{x+z}$, $z'_y=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$; 4) $z'_x=\dfrac{z\ln z}{x(\ln z-1)}$, $z'_y=\dfrac{-z^2}{xy(\ln z-1)}$; 5) $z'_x=-\dfrac{y+z}{x+y}$, $z'_y=-\dfrac{x+z}{y+x}$.

2. 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-z}{z-y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z-y}$; 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z}$.

3. 1) $z'_x=-\frac{f'_1+2xf'_2}{f'_1+2zf'_2}$, $z'_y=-\frac{f'_1+2yf'_2}{f'_1+2zf'_2}$; 2) $z'_x=\frac{zf'_1}{1-xf'_1-f'_2}$, $z'_y=\frac{-f'_2}{1-xf'_1-f'_2}$; 3) $z'_x=\frac{f'_1-f'_3}{f'_2-f'_3}$, $z'_y=\frac{f'_2-f'_1}{f'_2-f'_3}$; 4) $z'_x=-\left(1+\frac{f'_1+f'_2}{f'_3}\right)$, $z'_y=-\left(1+\frac{f'_2}{f'_3}\right)$.

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)$.

6. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}$.

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-f\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)}{f'\left(\frac{z}{y}\right)-2z}$.

8. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1-\frac{z}{x^2}F'_2}{\frac{1}{y}F'_1+\frac{1}{x}F'_2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_2-\frac{z}{y^2}F'_1}{\frac{1}{y}F'_1+\frac{1}{x}F'_2}$.

9. $u'_x=\frac{xF'_1}{u(F'_1+F'_2+F'_3)}$, $u'_y=\frac{yF'_2}{u(F'_1+F'_2+F'_3)}$, $u'_z=\frac{zF'_3}{u(F'_1+F'_2+F'_3)}$.

习题十六 1. 1) $3x+2y-z-3=0$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$; 2) $x-y+z-2=0$, $x-1=-(y-1)=z-2$; 3) $x+y-2z=0$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

2. $x+4y+6z=\pm 21$.

3. 过 (x_0, y_0, z_0) 的切平面为 $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}$.

4. 因曲面法向量 $\boldsymbol{N}=(cF'_1, cF'_2, -aF'_1-bF'_2)$ 与固定向量 (a, b, c) 正交.

5. 切平面为 $F'_1\cdot\frac{x-x_0}{z_0-c}+F'_2\cdot\frac{y-y_0}{z_0-c}-\left[F'_1\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}+F'_2\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}\right]$

$\times(z-z_0)=0$.

6. 在 (x_0, y_0, z_0) 点法向量为 $N=(a-2\Phi' x_0, b-2\Phi' y_0, c-2\Phi' z_0)$

7. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$，最大体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$。

8. 1) $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$; 2) $\left(\frac{x-a}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$.

9. 1) $\frac{x}{a}\cos\varphi_0\cos\theta_0+\frac{y}{b}\cos\varphi_0\sin\theta_0+\frac{z}{c}\sin\varphi_0=1$; 2) $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$.

习题十七 1. 1) 切线 $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-1$, $y=\frac{b}{2}$，法平面: $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$; 2) 切线: $x+z=2$, $y+2=0$, 法平面 $x-z=0$.

2. $M_1(-1, 1, -1)$, $M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

3. $T=(-a\sin t, a\cos t, b)$.

4. $T=(ae^t(\cos t-\sin t), ae^t(\sin t+\cos t), ae^t)$.

5. $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$.

6. $y=\pm x$.

7. $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$.

8. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{k}$, $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{k}$. (合起来为第一象限中抛物线)

习题十八 1. 1) $z''_{xx}=12x^2-8y^2$, $z''_{xy}=-16xy$, $z''_{yy}=12y^2-8x^2$; 2) $z''_{xx}=0$, $z''_{xy}=1-\frac{1}{y^2}$, $z''_{yy}=\frac{2x}{y^3}$; 3) $z''_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; 4) $z''_{xx}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $z''_{xy}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $z''_{yy}=-x\sin(x+y)$; 5) $z''_{xx}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $z''_{xy}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $z''_{yy}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; 6) $u''_{xx}=y^2z(z-1)(xy)^{z-2}$, $u''_{xy}=z^2(xy)^{z-1}$, $u''_{xz}=y(xy)^{z-1}+yz(xy)^{z-1}\ln(xy)$, $u''_{yy}=x^2z(z-1)(xy)^{z-2}$, $u''_{yz}=x(xy)^{z-1}+xz(xy)^{z-1}\ln(xy)$, $u''_{zz}=(xy)^z[\ln(xy)]^2$.

2. 1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-8x^3\cos(x^2+y^2)-12x\sin(x^2+y^2)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-8y^3\cos(x^2$

$+y^2)-12y\sin(x^2+y^2)$; 2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$; 3) $\frac{\partial^n z}{\partial y^k\partial x^{n-k}}=(-1)^{n-1}\times\frac{b^k a^{n-k}}{(ax+by)^n}$; 4) $\frac{\partial^n z}{\partial y^k\partial x^{n-k}}=(n-k+x)(k+y)e^{x+y}$.

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3x^2+12x-3y^2+12}{[(2+x)^2+y^2]^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{6xy+12y}{[(2+x)^2+y^2]^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

6. $\frac{\partial u}{\partial t}=\left(-\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}+\frac{(x-b)^2}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[-\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}+\frac{(x-b)^2}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}\right]e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$.

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-ct)+\psi''(x+ct)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\varphi''(x-ct)+c^2\psi''(x+ct)$.

习题十九 1 1) $u''_{xx}=a^2f''_{11}$, $u''_{xy}=abf''_{12}$, $u''_{yy}=b^2f''_{22}$; 2) $u''_{xx}=f''_{11}+2f''_{12}+f''_{22}$, $u''_{xy}=f''_{11}-f''_{22}$, $u''_{yy}=f''_{11}-2f''_{12}+f''_{22}$; 3) $u''_{xx}=f''_{11}+2yf''_{12}+y^2f''_{22}$, $u''_{xy}=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+xyf''_{22}+f'_2$, $u''_{yy}=f''_{11}+2xf''_{12}+x^2f''_{22}$; 4) $u''_{xx}=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}$, $u''_{yy}=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}$, $u''_{zz}=f''_{11}+4zf''_{12}+4z^2f''_{22}$, $u''_{xy}=f''_{11}+2(x+y)f''_{12}+4xyf''_{22}$, $u''_{xz}=f''_{11}+2(x+z)f''_{12}+4xzf''_{22}$, $u''_{yz}=f''_{11}+2(y+z)f''_{12}+4yzf''_{22}$; 5) $u''_{xx}=\frac{1}{y^2}f''_{11}$, $u''_{yy}=\frac{x^2}{y^4}f''_{11}-\frac{2x}{y^2z}f''_{12}+\frac{1}{z^2}f''_{22}+\frac{2x}{y^3}f'_1$, $u''_{zz}=\frac{y^2}{z^4}f''_{22}+\frac{2y}{z^3}f'_2$, $u''_{xy}=-\frac{x}{y^2}f''_{11}+\frac{1}{yz}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_1$, $u''_{xz}=-\frac{1}{z^2}f''_{12}$, $u''_{yz}=\frac{x}{yz^2}f''_{12}-\frac{y}{z^3}f''_{22}-\frac{1}{z^2}f'_2$; 6) $u''_{xx}=2f'+4x^2f''$, $u''_{yy}=2f'+4y^2f''$, $u''_{zz}=2f'+4z^2f''$, $u''_{xy}=4xyf''$, $u''_{xz}=4xzf''$, $u''_{yz}=4yzf''$.

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x^2f''_{11}+8xyf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4y^2f''_{11}-8xyf''_{12}+4x^2f''_{22}-2f'_1$.

3. $\frac{\partial u}{\partial \xi}=f'_1\cdot\cos\alpha+f'_2\cdot\sin\alpha$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}=-f'_1\sin\alpha+f'_2\cos\alpha$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=f''_{11}\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha f''_{12}+f''_{22}\sin^2\alpha$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=f''_{11}\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha f''_{12}+f''_{22}\cos^2\alpha$.

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{\alpha^2(c_1e^{-\alpha r}+c_2e^{\alpha r})}{r}-\frac{2\alpha(c_2e^{\alpha r}-c_1e^{-\alpha r})}{r^2}+\frac{2(c_1e^{-\alpha r}+c_2e^{\alpha r})}{r^3}\right]\times\frac{x^2}{r^2}+\left[\frac{\alpha(c_2e^{\alpha r}-c_1e^{-\alpha r})}{r}-\frac{c_1e^{-\alpha r}+c_2e^{\alpha r}}{r^2}\right]\frac{(y^2+z^2)}{r^3}$.

习题二十

1. $z''_{xx}=\frac{2z^3(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{y(xy-z^2)^3}$, $z''_{xy}=\frac{-2xz^3(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{y^2(xy-z^2)^3}$,

$z''_{yy}=\frac{2x^2z^3(x^3+y^3+z^3-3xyz)}{y^3(xy-z^2)^3}$.

2. $u''_{xx}=-\frac{u^2+v^2}{(u-v)^3}$, $u''_{xy}=\frac{u+v}{2(u-v)^3}$, $u''_{yy}=\frac{-1}{2(u-v)^3}$, $v''_{xx}=\frac{u^2+v^2}{(u-v)^3}$,

$v''_{xy}=-\frac{u+v}{2(u-v)^3}$, $v''_{yy}=\frac{1}{2(u-v)^3}$.

3. 1) $u''_{xx}=-\frac{2x}{z}-\frac{(x+y)(x^2+z^2)}{z^3}$, $u''_{yy}=-\frac{2y}{z}-\frac{(x+y)(y^2+z^2)}{z^3}$,

$u''_{xy}=1-\frac{x+y}{z}-\frac{xy(x+y)}{z^3}$; 2) $u''_{xx}=\frac{xy(x^2+3z^2)}{z^3}$, $u''_{yy}=-$

$\frac{xy(y^2+3z^2)}{z^3}$, $u''_{xy}=z-\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{z^3}$.

5. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\sin 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$.

6. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi}{x\varphi'+\psi'}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x\varphi'+\psi'}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=\frac{2\varphi\varphi'}{(x\varphi'+\psi')^2}-\frac{\varphi^2(x\varphi''+\psi'')}{(x\varphi'+\psi')^3}$,

$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=-\frac{x\varphi''+\psi''}{(x\varphi'+\psi')^3}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{\varphi'}{(x\varphi'+\psi')^2}+\frac{\varphi(x\varphi''+\psi'')}{(x\varphi'+\psi')^3}$.

7. 1) $z''_{xx}=\frac{f''_{11}\cdot(1-f'_2)^2+2f'_1(1-f'_2)f''_{12}+f'^2_1f''_{22}}{(1-f'_2)^3}$,

$z''_{yy}=\frac{f''_{11}\cdot(1-f'_2)^2+2(1+f'_1)(1-f'_2)f''_{12}+(1+f'_1)^2f''_{22}}{(1-f'_2)^3}$,

$z''_{xy}=\frac{f''_{11}\cdot(1-f'_2)^2+(1+2f'_1)(1-f'_2)f''_{12}+f'_1(1+f'_1)f''_{22}}{(1-f'_2)^3}$;

2) $z''_{xx}=[f''_{11}\cdot(f'_2-f'_3)^2+2f''_{12}(f'_3-f'_1)(f'_2-f'_3)+f''_{22}\cdot(f'_1-f'_3)^2+2f''_{13}$ $\cdot(f'_2-f'_3)(f'_1-f'_2)+2f''_{23}(f'_3-f'_1)(f'_1-f'_2)+f''_{33}(f'_1-f'_2)^2]/(f'_2-f'_3)^3$,

$z''_{yy}=[f''_{11}\cdot(f'_2-f'_3)^2-2f''_{12}(f'_1-f'_3)(f'_2-f'_3)-2f''_{13}(f'_2-f'_1)\cdot(f'_2-f'_3)$ $+f''_{22}(f'_1-f'_3)^2-2f''_{23}(f'_1-f'_3)(f'_1-f'_2)+f''_{33}(f'_2-f'_1)^2]/(f'_2-f'_3)^3$,

$z''_{xy}=[-f''_{11}\cdot(f'_2-f'_3)^2+2f''_{12}(f'_1-f'_3)(f'_2-f'_3)+2f''_{13}(f'_1-f'_2)(f'_3-f'_2)$ $-f''_{22}(f'_1-f'_3)^2+2f''_{23}(f'_2-f'_1)(f'_3-f'_1)-f''_{33}(f'_1-f'_2)^2]/(f'_2-f'_3)^3$

习题二十一 1. $u=\frac{C_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. $u=f(x+t)+g(x-t)$, f, g 为任意可微函数.

3. $u=f(x-3y)+g(x+y)$, f, g 为任意可微函数.

4. $a\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial S\partial t}+c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a\frac{\partial u}{\partial S}-b\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

5. $u=f(\ln x+3\ln y)+g(\ln x+\ln y)$, f, g 为任意可微函数.

6. $u=\frac{1}{r}[f(r+t)+g(r-t)]$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, f, g 为任意可微函数.

习题二十二 1. $f(x, y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$.

2. 1) $f(x, y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(\rho^2)$; 2) $f(x, y)=1+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+o(\rho^2)$; 3) $f(x, y)=\frac{\pi}{4}+x-xy+o(\rho^2)$.

3. $f(x, y)=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2)$.

4. $z=1+2(x-1)-(y-1)+8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(\rho^2)$.

习题二十三 1. $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

2. $\frac{\partial u}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$, 1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 及 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

3. $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{2}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

6. $\operatorname{grad} u=(3x^2-3yz, 3y^2-3xz, 3z^2-3xy)$, 1) $xy=z^2$; 2) $x=y=0$; 3) $x=y=z$.

7. $\cos\theta=-\frac{8}{9}$.

习题二十四 1. 1) 当 $x=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, $z_{极小}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$, 当 $x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, $z_{极大}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$; 2) $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时, $z_{极小}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; 3) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 当 k 为偶数时, $z_{极大}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, 当 k 为奇数时, $z_{极小}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 当 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$, $u_{极小}=-3$,

当 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$ 时, $u_{极大}=3$; 5) 当 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 及 $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 及 $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{极小}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, 当 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 及 $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 及 $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时, $u_{极大}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

2. 当 $x=y=\frac{l}{2}$ 时, $z_{极小}=\left(\frac{l}{2}\right)^2$.

3. $x_1=x_2=\cdots=x_n=na$ 时, $z_{极小}=(na)^n$.

4. 抛物线上的点为 (1, 2), 直线上的点为 $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5. 矩形的边为 $\frac{2P}{3}$ 及 $\frac{P}{3}$.

6. 正三角形时面积最小, 其值为 $3\sqrt{3}a^2$ (a 为圆半径).

7. P 为三点的中心时最小, $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

9. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

10. $z_{极值}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)}$, 当 $ac-b^2>0$, $a>0$ 时有极大与极小; 当 $ac-b^2>0$, $a<0$, $c<0$ 时无极值; 当 $ac-b^2<0$ 时有一极小值; 当 $ac-b^2=0$, $a+b>0$ 时有一极小值 $z_{极值}=\frac{1}{a+c}$.

11. 极大值 $z=a$, 极小值 $z=\frac{a}{3}$.

习题二十五 1. 1) 无极值点; 2) 当 $x=1$, $y=0$ 时, $z_{极小}=-1$; 3) 当 $x=1$, $y=1$ 时, $z_{极小}=-1$; 4) $x=0$, $y=0$ 无极值, $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ 时, $z_{极小}=-8$, $x=-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 时, $z_{极小}=-8$; 5) 当 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时, $z_{极大}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 当 $x=y=\frac{5}{3}\pi$ 时, $z_{极小}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 当 $x=y=\pi$ 无极值. 一般地有 $x=2m\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=2n\pi+\frac{\pi}{3}$ 时, $z_{极大}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 当 $x=2m\pi+\frac{5\pi}{3}$, $y=2n\pi+\frac{5\pi}{3}$ 时, $z_{极小}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 6) 当 $x=y=0$ 时, 无极值, 当 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时, $z_{极小}=3\sqrt{3}$, 当 $x=y=\frac{2}{3}\pi$ 时, $z_{极大}=-3\sqrt{3}$, 当 $x=y$

$=\pi$ 时无极值，当 $x=0$, $y=\pi$ 时无极值，当 $x=\pi$, $y=0$ 时无极值. 一般地有 $x=m\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=n\pi+\frac{\pi}{3}$ 时，$z_{极小}=3\sqrt{3}$，当 $x=m\pi+\frac{2}{3}\pi$, $y=n\pi+\frac{2}{3}\pi$ 时，$z_{极大}=-3\sqrt{3}$；7) 当 $x=y=0$，及 $x=0$, $y=\pi$，及 $x=\pi$, $y=0$，及 $x=y=\pi$ 时，无极值，当 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时，$z_{极大}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，当 $x=y=\frac{2}{3}\pi$ 时，$z_{极小}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$，一般地有 $x=m\pi+\frac{\pi}{3}$, $y=n\pi+\frac{\pi}{3}$ 时，$z_{极大}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，当 $x=m\pi+\frac{2}{3}\pi$, $y=n\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，$z_{极小}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 8) $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$, $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^{n}$，当 m 为奇数，n 为偶数时有极大值，当 m 为偶数，n 为奇数时，有极小值，当 m 与 n 有相同奇偶性时无极值.

2. 1) 当 $x=1$, $y=-1$ 时极小值 $z_1=-2$ 及极大值 $z_2=6$. 2) 当 $x=y=-(3+\sqrt{6})$ 时，$z_{极小}=-(4+2\sqrt{6})$，当 $x=y=-(3-\sqrt{6})$ 时，$z_{极大}=2\sqrt{6}-4$.

第　二　章

习题一　4. 1) 4; 2) -4; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 大于零; 7) 0; 8) 1.

习题二　1. 1) $\frac{8}{3}$; 2) $(e^4-1)^2$; 3) $\frac{a^2b^2(a+b)}{6}$; 4) $5\ln 3-4\ln 2$.

2. 1) $\int_0^a dy\int_y^a f\,dx$; 2) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx$; 3) $\int_{-a}^{0} dx\int_{-a}^{a} f\,dy+\int_0^{\sqrt{a}} dx\int_{x^2}^{a} f\,dy$;

4) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0} dy\int_{\frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}} f\,dx+\int_0^2 dy\int_{y-1}^{\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}} f\,dx$.

3. 1) $\frac{65}{96}a^4$; 2) $\frac{131}{105}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{ab^2}{30}$; 5) $\frac{16}{315}$.

4. 1) $\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)a^2$; 2) $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$.

5. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{88}{105}$.

习题三　1. 1) $\frac{4}{3}a^3$; 2) $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$; 3) π^2a^2; 4)

$\frac{2}{3}a^2$; 5) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; 6) $\frac{\pi}{6a}$.

2. 1) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$; 2) $\frac{\pi}{4}a^2$.

3. 1) $\frac{\pi}{4}R^2a-\frac{2}{3}R^3$; 2) $\frac{3}{4}\pi a^3$; 3) $\frac{2}{9}a^3$.

习题四 1. 1) $\frac{1}{364}$; 2) $\frac{1}{48}$; 3) $1-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{384}$.

2. 1) $\frac{1}{3}abc(a^2+b^2+c^2)$; 2) $\frac{4}{15}\pi a^5(l+m+n)$.

3. 1) $\frac{2}{3}ma^3$; 2) πma^3; 3) $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi abc$; 4) $16\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a^3$.

习题五 1. 1) $\frac{2}{3}\pi[(a^2+h^2)^{3/2}-h^3-a^3]$; 2) $\frac{16}{3}\pi$; 3) $\frac{7}{12}\pi$; 4) $\frac{\pi}{12}$;

5) $\frac{4}{15}a^5\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8}{15}\right)$.

2. 1) $\frac{15}{64}\pi a^3$; 2) $\frac{15}{64}\pi a^3$; 3) $\frac{\pi}{6}a^3$;

3. 37:27.

习题六 1. 1) $\frac{4}{5}\pi$; 2) $4\pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; 3) $\frac{7}{6}\pi a^4$; 4) $\frac{\pi^3}{4}$; 5) $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$.

2. 1) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; 2) $10\pi a^3$.

习题七 1. 1) $\frac{2}{3}\pi ab$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{1}{2}(e-1)$.

2. 1) $\frac{ab}{70}$; 2) $\frac{a^4}{2}\ln 2$.

3. 1) $\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$; 2) $\frac{3}{8}\pi abc$.

4. 1) $\frac{\pi^2}{4}abc$; 2) $\frac{4\pi}{3}(a+b+c)R^3$; 3) $\frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}$.

习题八 1. 1) $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$; 2) $48\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)R^2$; 3) $2(\pi-2)a^2$;

4) $4a^2$; 5) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

2. 1) $x=\frac{a}{5}$, $y=\frac{a}{5}$; 2) $x=\frac{a}{6}$, $y=0$; 3) $x=\frac{4a}{3\pi}$, $y=\frac{4b}{3\pi}$.

3. $x=\frac{3}{8}a$, $y=z=0$.

4. $x=\frac{3}{8}\frac{(c+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$, $y-z=0$.

5. $\frac{1}{2\pi}$.

6. $I_x=\frac{M}{12}(3b^2+h^2)$, $I_y=\frac{M}{12}(3a^2+h^2)$, $I_z=\frac{M}{4}(a^2+b^2)$.

7. $I_x=\frac{M}{5}(b^2+c^2)$, $I_y=\frac{M}{5}(c^2+a^2)$, $I_z=\frac{M}{5}(a^2+b^2)$.

8. $F_x=F_y=0$, $F_z=-2\pi\rho k\left[b+\sqrt{a^2+(h-b)^2}-\sqrt{h^2+a^2}\right]$.

第　三　章

习题一　1. 1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\frac{256}{15}a^3$; 3) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$; 4) $2\pi^2$; 5) $4a^{7/3}$.

2. 1) $\frac{2}{3}\pi(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\frac{2}{3}\pi a^3$.

3. $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

习题二　1. 1) a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{12}$, c) $\frac{17}{30}$, d) $-\frac{1}{20}$; 2) a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{3}{2}$, c) $-\frac{1}{2}$; 3) a) 2, b) 2, c) 2; 4) $-\frac{14}{15}$; 5) 0; 6) $-2\pi a^2$; 7) -2π; 8) 0; 9) 0; 10) $\frac{3}{16}\pi a^{4/3}$.

2. 1) a) 1, b) 1; 2) $-\pi a^2$; 3) $\frac{1}{35}$; 4) -4.

习题三　1. 1) πa^3; 2) $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$; 3) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; 4) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$.

2. 1) $\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})\right]$; 2) $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

3. $F_x=F_y=0$, $F_z=2\pi k\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$.

习题四　1. 1) $3abc$; 2) 0; 3) $\pi h r^2$.

2. 1) $4\pi R^3$; 2) $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$; 3) $\frac{\pi}{2}c(b^2-a^2)$.

习题五　1. $\frac{3}{8}\pi ab$.

2. 1) $\frac{\pi}{2}a^4$; 2) $-2\pi a^3$; 3) $-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$; 4) 1; 5) 0.

3. 1) $\frac{\pi}{8}ma^2$; 2) 1.

习题六 1. 1) [illegible]; 2) 12; 3) 4; 4) -2; 5) $\frac{3}{2}$; 6) 9; 7) 12; 8) 1; 9) $\pi+1$; 10) $e^a\cos b-1$.

2. 1) $u=\frac{x^3}{3}+x^2y$ [illegible] $\frac{y^3}{3}+c$; 2) $u=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+c$; 3) $u=$ [illegible]; 4) $u=$ [illegible] $+c$; 5) $u=(x+y)(e^x-e^y)+c$.

3. 1) $-53\frac{7}{12}$; 2) 0; 3) [illegible]

习题七 2. $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$, $f(r)=c_1+\frac{c_2}{r}$, c_1, c_2任意常数.

3. $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$.

4. $3f(r)+rf'(r)$, $f(r)=\frac{c}{r^3}$, c任意常数.

6. 1) $4\pi a^3$; 2) $3a^4$; 3) $\frac{5}{4}\pi a^4 c$; 4) $\frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2)$.

7. $-\frac{\pi h^4}{2}$.

9. $4\pi a^2$.

10. 1) 4π; 2) 4π; 3) 0.

习题八 1. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=2(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$; $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{F}=0$; $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\times\boldsymbol{F}=2[(y+z-2x)\boldsymbol{i}+(z+x-2y)\boldsymbol{j}+(x+y-2z)\boldsymbol{k}]$.

3. 1) $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$; 2) $2f(r)\boldsymbol{c}+\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})]$.

4. 1) 0; 2) 0.

6. 1) $\pi\sqrt{3}a^2$; 2) $-2\pi a(a+h)$; 3) $2\pi hr^2$; 4) $-\frac{9}{2}a^3$.

□□□ □□□

4.1 □□□□□□

4.2 □□□□□□
□□□

4.3 □□□□□
□□□□

□□□ □□□□□□□

5.1 □□□□
□□□□

5.2 □□□□
□□□□

5.3 □□□□□□□□□□

5.4 □□□□□
□□□□

□□□ □□□□□□

6.1 □□□□□
□□□□

6.2 □□□□□□□□□□
□□□□

6.3 □□□□□□□□□

6.4 □□□□□□□□□
□□□□

□□□ □□□□

7.1 □□□□□
□□□□

7.2 □□□□□□□□□
□□□□

7.3 □□□□□□□□